

# Viskosität und Reynoldszahlen

## Stichworte:

Reibung, Reibungskraft, Auftrieb, Viskosität, laminare und turbulente Strömung, REYNOLDSzahl, STOKESSches Gesetz, BERNOULLIsches Gesetz, HAGEN-POISEUILLESches Gesetz

## Literatur:

- /1/ DEMTRÖDER, W.: „Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme“, Springer-Verlag, Berlin u.a.
- /2/ SCHENK, W., KREMER, F. (Hrsg.): „Physikalisches Praktikum“, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden
- /3/ WALCHER, W.: „Praktikum der Physik“, Teubner Studienbücher, Teubner-Verlag, Stuttgart

## 1 Einleitung

Das NEWTONsche Gesetz „Kraft proportional Beschleunigung“ scheint vielen alltäglichen Erfahrungen zu widersprechen. Betrachtet man beispielsweise die Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Reibung, so trifft die Beschreibung „Kraft proportional Geschwindigkeit“ eher zu: um etwa beim Radfahren eine konstante Geschwindigkeit einzuhalten, muss dauernd Kraft aufgewendet werden. Will man dauerhaft schneller fahren, muss man dauerhaft schneller treten, was dauernd mehr Kraft erfordert.

Tatsächlich lassen sich viele mechanische Abläufe, bei denen Reibung eine Rolle spielt, mit dem Ansatz „Kraft  $\sim$  Geschwindigkeit“ befriedigend beschreiben. Das gilt z.B. für den Einfluss der Reibung auf das Fallen von Kugeln in Flüssigkeiten oder Gasen. Zwei wichtige Beispiele für solche Fallvorgänge sind das Absetzen von Staubteilchen oder Wassertropfchen (Nebel) aus der Luft und die Bewegung winziger Öltröpfchen, wie sie im MILLIKANSchen Versuch zur Bestimmung der Elementarladung zur Anwendung kommen.

Dieser Versuch hat zum Ziel, aus der Beobachtung solcher Fallvorgänge und der Strömung von Flüssigkeiten durch Kapillaren die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen. Außerdem wird der Übergang von einer laminaren in eine turbulente Strömung untersucht und die zugehörige REYNOLDSzahl bestimmt.

## 2 Theorie

### 2.1 Bestimmung der Viskosität mit der Kugelfallmethode nach Stokes

Wir betrachten gemäß Abb. 1 eine Kugel vom Radius  $r$ , die mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  durch eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit gezogen wird. Um die Kugel zu bewegen, müssen Reibungskräfte überwunden werden. Sie rühren daher, dass die direkt an die Kugel angrenzende Flüssigkeitsschicht an der Kugel haftet und folglich mitbewegt werden muss. Die mitbewegte Schicht reißt die ihr benachbarte Flüssigkeitsschicht mit, diese reißt wiederum ihre Nachbarschicht mit usw. Im Ergebnis entsteht infolge dieser Reibung um die Kugel herum eine Flüssigkeitsströmung, deren Geschwindigkeit mit größer werdendem Abstand quer zur Kugel abnimmt.

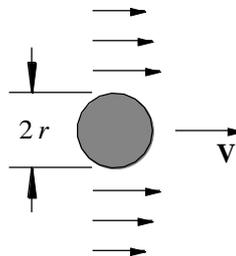


Abb. 1: Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit.

Aus den NAVIER-STOKES-Gleichungen<sup>1</sup>, mit denen Bewegungen von Flüssigkeiten beschrieben werden können, lässt sich die Reibungskraft  $\mathbf{F}_R$  berechnen, die die Flüssigkeit einer Bewegung der Kugel mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  entgegensetzt. Da die Vektoren  $\mathbf{F}_R$  und  $\mathbf{v}$  längs der gleichen Achse orientiert sind,

<sup>1</sup> CLAUDE LOUIS MARIE HENRI NAVIER (1785 – 1836); GEORGE GABRIEL STOKES (1819 – 1903).

reicht im Folgenden eine Betrachtung ihrer Beträge  $F_R$  und  $v$ . Nach einer komplizierten Rechnung, die erst in höheren Semestern nachvollzogen werden kann, ergibt sich, dass die *Reibungskraft*  $F_R$  zur *Geschwindigkeit*  $v$  und zum *Kugelradius*  $r$  proportional ist:

$$(1) \quad F_R \sim v \quad F_R \sim r$$

und dass gilt:

$$(2) \quad F_R = 6\pi\eta r v$$

Die Konstante  $\eta$  heißt *Viskosität* (auch *Koeffizient der inneren Reibung* oder *dynamische Zähigkeit*). Ihre SI-Einheit ist  $[\eta] = \text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s}) = \text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 = \text{Pa}\cdot\text{s}$ . Die alte CGS-Einheit, die noch in vielen Tabellenwerken gebräuchlich ist, ist das POISE<sup>2</sup> (1 POISE = 1 p = 1 g/(cm·s)).

Gl. (2) ist das so genannte *STOKESSche Gesetz*. Es beschreibt die Bewegung der Kugel jedoch nur dann richtig, wenn die durch die Kugelbewegung erzeugte Flüssigkeitsströmung *laminar* ist. Eine laminare Strömung liegt dann vor, wenn die einzelnen Flüssigkeitsschichten glatt übereinander gleiten, also nicht untereinander verwirbeln. Anschaulich bedeutet dies, dass sich glatte, zusammenhängende Stromlinien um die Kugel herum ausbilden (Abb. 2). Im Gegensatz dazu spricht man von *turbulenter* Strömung, wenn die Flüssigkeitsschichten untereinander verwirbeln. In diesem Fall ergeben sich verwirbelte Stromlinien (Abb. 3) und die aufzuwendende Kraft wird oft proportional zu  $v^2$ :

$$(3) \quad F_R \sim v^2$$

Mit Hilfe der dimensionslosen *REYNOLDSzahl*<sup>3</sup>  $Re$  lässt sich abschätzen, ob eine Strömung laminar oder turbulent verläuft. Sie ist gegeben durch:

$$(4) \quad Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

Dabei ist  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit und  $l$  eine für den betrachteten Strömungsvorgang charakteristische Länge. In unserem Fall entspricht  $l$  dem Durchmesser der Kugel; im Falle einer Strömung durch ein Rohr (vgl. Gl. (35)) entspricht  $l$  dem Rohrdurchmesser.

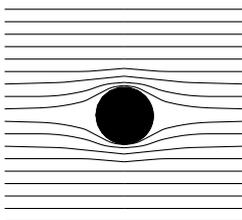


Abb. 2: Laminare Strömung um eine Kugel.

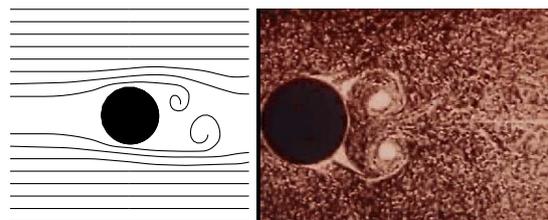


Abb. 3: Turbulente Strömung um eine Kugel. Links schematisch, rechts Originalaufnahme von LUDWIG PRANDTL (1875–1953)<sup>4</sup>.

Die *REYNOLDSzahl* hat eine anschauliche physikalische Bedeutung: sie ist proportional zum Quotienten aus der kinetischen Energie  $E_k$  eines Volumenteilchens mit der Kantenlänge  $l$  und der Reibungsenergie  $E_R$ , die beim Verschieben des Teilchens um die Strecke  $l$  „verbraucht“ wird. Für das Beispiel eines kugelförmigen Flüssigkeitsteilchens (Masse  $m$ , Geschwindigkeit  $v$ , Dichte  $\rho$ , Durchmesser  $l$ ) ergibt sich als kinetische Energie:

$$(5) \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{12} \rho \pi l^3 v^2$$

<sup>2</sup> JEAN-LOUIS MARIE POISEUILLE (1799 – 1869).

<sup>3</sup> OSBORN REYNOLDS (1842 – 1912)

<sup>4</sup> Quelle: PHYSIK JOURNAL 3.10 (2004) 31-37

Die Reibungsenergie ist das Produkt aus Reibungskraft (Gl. (2) mit  $r = l/2$ ) und Strecke  $l$ :

$$(6) \quad E_R = 3 \pi \eta v l^2$$

Der Quotient beider Größen ergibt bis auf die Konstante  $1/36$  die REYNOLDSzahl aus Gl. (4).

Eine Strömung verläuft laminar bei „kleinen“ und turbulent bei „großen“ REYNOLDSzahlen<sup>5</sup>. Dabei sind die Begriffe „klein“ und „groß“ jedoch nur als *relative* Angaben zu verstehen. Was „klein“ und was „groß“ ist, ist stark abhängig vom betrachteten Experiment. So verlaufen z.B. Rohrströmungen laminar für REYNOLDSzahlen  $Re < 2.000 - 2.500$ . Für fallende Kugeln in Flüssigkeiten muss  $Re < 0,2$  sein /3/, damit die Strömung nicht turbulent wird und das STOKESSche Gesetz gültig bleibt.

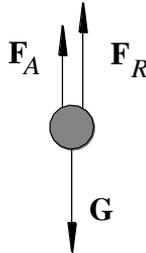


Abb. 4: Wirkende Kräfte auf eine fallende Kugel.

Wir betrachten nun das Fallen einer Kugel mit der Masse  $m$ , dem Radius  $r$  und dem Volumen  $V$  in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit mit der Dichte  $\rho_F$  und der Viskosität  $\eta$ . Auf die Kugel wirken drei Kräfte (Abb. 4), die alle in vertikaler Richtung orientiert sind. Deshalb reicht die Betrachtung ihrer Beträge. Die Kräfte sind die nach unten gerichtete Gewichtskraft  $G = mg$  ( $g$ : Erdbeschleunigung), die nach oben gerichtete Auftriebskraft  $F_A = \rho_F V g$  und die ebenfalls nach oben gerichtete Reibungskraft (Gl. (2))  $F_R = 6\pi\eta r v$ . Die resultierende Kraft  $F$  ist also:

$$(7) \quad F = G - F_A - F_R$$

Diese Kraft  $F$  beschleunigt die Kugel nach unten auf zunächst immer größer werdende Geschwindigkeiten  $v$ . Mit  $v$  wächst jedoch auch  $F_R$ , so dass  $F$  immer kleiner und schließlich gleich null wird. Von diesem Zeitpunkt an gilt:

$$(8) \quad F = G - F_A - F_R = 0$$

Die Kugel fällt von nun an mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0$ .

#### Frage 1:

- Wie bewegt sich eine Gasblase, die am Boden eines Wasserglases freigesetzt wird (z. B. eine  $\text{CO}_2$ -Blase in einem Glas mit Mineralwasser)?

Setzen wir  $G$ ,  $F_A$  und  $F_R$  mit  $v = v_0$  in Gl. (8) ein, so erhalten wir:

$$(9) \quad mg - \rho_F V g - 6\pi\eta r v_0 = 0$$

Wir setzen nun noch  $m = \rho_K V$  (mit  $\rho_K$ : Dichte des Kugelmateriale) sowie  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  und erhalten damit aus Gleichung (9):

$$(10) \quad \frac{4}{3}\pi r^3 g (\rho_K - \rho_F) - 6\pi\eta r v_0 = 0$$

Lösen wir diese Gleichung nach  $\eta$  auf, so erhalten wir

<sup>5</sup> Die Bedingungen für laminare oder turbulente Strömungen sind nach neueren Erkenntnissen erheblich komplexer, als in diesem Text und in gängigen Lehrbüchern dargestellt, siehe z.B. B. HOF et al: „Finite lifetime of turbulence in shear flows“, Nature 443 (2006) 59-62. Hierauf kann im Rahmen des Basispraktikums jedoch nicht eingegangen werden.

$$(11) \quad \eta = \frac{2}{9} r^2 g \frac{(\rho_K - \rho_F)}{v_0}$$

Aus Gl. (11) folgt eine einfache Möglichkeit zur indirekten Messung von  $\eta$ , wenn  $\rho_K$  und  $\rho_F$  bekannt sind: Man lässt Kugeln vom Radius  $r$  in der zu untersuchenden Flüssigkeit fallen und misst ihre Fallgeschwindigkeit  $v_0$  nach Erreichen des Zustands  $F = 0$ .

Dabei taucht ein Problem auf: In der Regel haben wir es nicht mit unendlich ausgedehnten Flüssigkeiten zu tun, sondern beispielsweise mit Zylindern vom Radius  $R$ , in denen das Fallen der Kugeln beobachtet wird. In diesen Fällen muss die zusätzliche Reibung der von der Kugel mitgerissenen Flüssigkeit an der Zylinderwand berücksichtigt werden. Sie führt dazu, dass die gemessene Geschwindigkeit  $v_m$  kleiner ist als die Geschwindigkeit  $v_0$  im Falle der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit. Da die Abweichung zwischen  $v_0$  und  $v_m$  vor allem durch das Verhältnis der Querschnittsflächen von Kugel und Zylinder bestimmt ist, kann näherungsweise gesetzt werden:

$$(12) \quad v_m \approx v_0 - k \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

wobei  $k$  ein experimentell zu bestimmender *Korrekturfaktor* ist<sup>6</sup>. Damit folgt:

$$(13) \quad v_0 \approx v_m + k \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

## 2.2 Bestimmung der Viskosität mit einem Kapillarviskosimeter nach UBBELOHDE

Durch eine senkrecht stehende Kapillare vom Radius  $r_0$  strömt eine Flüssigkeit. Die Zeit  $\Delta t$ , die ein Flüssigkeitsvolumen  $V$  benötigt, um durch die Kapillare zu fließen, wird durch die Viskosität  $\eta$  der Flüssigkeit bestimmt. Je größer  $\eta$ , desto größer  $\Delta t$ . Nach diesem einfachen Prinzip arbeiten Kapillarviskosimeter. Abb. 5 zeigt ein solches Kapillarviskosimeter nach UBBELOHDE, das in Kap. 3.2 und im Anhang 4.4 noch näher beschrieben wird.

Die exakte Herleitung des quantitativen Zusammenhangs zwischen  $\eta$  und  $\Delta t$  erfordert einigen Aufwand. Die Herleitung ist im Anhang 4.4 dargestellt. Hier geben wir nur das Ergebnis wieder:

$$(14) \quad \eta = K \rho \Delta t$$

Hierbei ist  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit und  $K$  eine Apparatekonstante des verwendeten Viskosimeters, in die u.a. das durchgeflossene Volumen  $V$  eingeht (Abb. 5).

Für die *kinematische Viskosität*  $\nu = \eta/\rho$  mit der Einheit  $[\nu] = \text{m}^2/\text{s}$  erhält man:

$$(15) \quad \nu = K \Delta t$$

In Gl. (14) und (15) ist noch eine Korrektur anzubringen. Wenn nämlich die Flüssigkeit aus dem breiten Vorratsgefäß B (Abb. 5) des Kapillarviskosimeters in die enge Kapillare eintritt, muss sie nach dem BERNOULLISchen Gesetz<sup>7</sup> beschleunigt werden. Die dazu erforderliche Arbeit führt zu einem kleinen Druckverlust, der eine Vergrößerung der Auslaufzeit  $\Delta t$  bewirkt. Von den gemessenen Zeiten  $\Delta t$  sind daher Korrekturzeiten  $t_k$  abziehen (*HAGENBACHSche Korrektur*), die von den Herstellern der UBBELOHDE- Viskosimeter als *Apparatekonstanten* mitgeliefert werden. Die endgültige Gleichung zur Bestimmung der kinematischen Viskosität lautet daher:

$$(16) \quad \nu = K (\Delta t - t_k)$$

<sup>6</sup> Gl. (13) ist ein für die verwendete Versuchsanordnung empirisch gefundenes Gesetz. Die vielfach verwendete Korrektur nach LADENBURG (siehe z.B. /2/) liefert für diese Versuchsanordnung deutlich schlechtere Ergebnisse.

<sup>7</sup> DANIEL BERNOULLI (1700 – 1782).

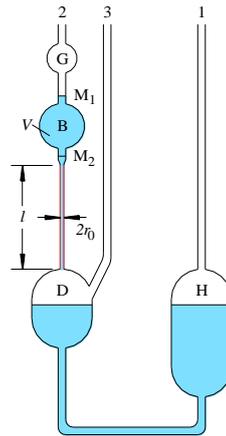


Abb. 5: Kapillarviskosimeter nach UBBELOHDE. Durch die Kapillare (rot) mit Radius  $r_0$  und Länge  $l$  strömt während der Zeit  $\Delta t$  das Volumen  $V$ . Weitere Bezeichnungen siehe Kap. 3.2 und Anhang 4.4.

### 2.3 Laminare und turbulente Rohrströmung

Abb. 6 zeigt eine Anordnung, mit der der Übergang von einer laminaren in eine turbulente Strömung in einem zylindrischen Rohr untersucht werden kann<sup>8</sup>. Ein langes Plexiglasrohr vom Innendurchmesser  $d$  wird von einer Flüssigkeit, hier Wasser, durchströmt. Das Wasser fließt aus einem Tank in das Rohr. Durch einen Zulauf (Wasserhahn) strömt Wasser in den Tank nach. Ein Überlauf sorgt dafür, dass der Wasserstand im Tank konstant bleibt, so dass am Einlauf in das Rohr immer der gleiche Druck herrscht. Ein Vlies sorgt für eine Beruhigung des Wasserzulaufs. Mit einem Hahn  $H_1$  am Ende des Rohres kann die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  reguliert werden.

Zusätzlich zu dem Wasser aus dem Tank gelangt gleichzeitig ein dünner Strahl mit eingefärbtem Wasser durch eine Düse mittig in das Rohr. Die Durchflussmenge durch die Düse kann mit einem Hahn  $H_2$  variiert werden. Der Strahl ist bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit  $v$  als glatter *Stromfaden* in dem Rohr zu sehen. Wird die Strömungsgeschwindigkeit durch Öffnen des Hahns  $H_1$  langsam erhöht, beginnt der Stromfaden ab einer bestimmten Geschwindigkeit  $v_t$  zu verwirbeln und zeigt damit den Übergang von einer laminaren in eine turbulente Strömung an. Durch Messen der Wasserdurchflussmenge pro Zeit bei dieser Stellung des Hahns  $H_1$  kann die Strömungsgeschwindigkeit  $v_t$  bestimmt und die zugehörige REYNOLDSZahl  $Re$  berechnet werden:

$$(17) \quad Re = \frac{\rho_w v_t d}{\eta_w}$$

Dabei sind  $\rho_w$  und  $\eta_w$  die Dichte und Viskosität des Wassers.

Einzelheiten zur quantitativen Beschreibung der Wasserströmung durch ein Rohr sind im Anhang 4.3 dargestellt.

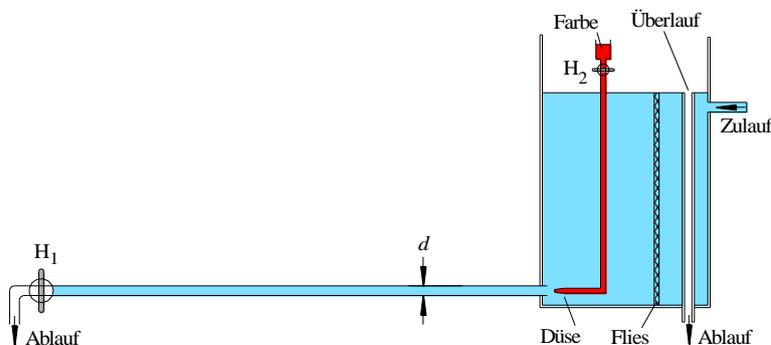


Abb. 6: Anordnung zur Untersuchung des Übergangs von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung in einem Rohr vom Innendurchmesser  $d$ . Einzelheiten siehe Text.

<sup>8</sup> Nach Empfehlung von A. HEIDER, DEUTSCHES ZENTRUM FÜR LUFT- UND RAUMFAHRT (DLR), Göttingen.

### 3 Versuchsdurchführung

#### Zubehör:

6 Glaszylinder mit unterschiedlichen Durchmessern in justierbarem Gestell mit Wasserwaage, Stopfen für die Zylinder mit mittig angebrachtem Loch, 2 l Behälter mit Glycerin-Wasser-Gemisch, Stahlkugeln (ca. 100 Stück mit  $d \approx 2$  mm), Pinzette, Analysenwaage (Genauigkeit 0,001 g), Laborwaage (Genauigkeit 0,01 g), Bügelmessschraube, Messschieber, Stoppuhr, Thermometer (Genauigkeit 0,1 °C), Magnet, UBBELOHDE-Viskosimeter ( $K \approx 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}^2$ ) in Halterung und Wasserbad, Saugschlauch, Ethanol, Strömungsrohr ( $d = (12,10 \pm 0,05) \text{ mm}$ ) in Halterung mit Wassertank, Wasser mit Lebensmittelfarbe, Messzylinder (100 ml und 1000 ml), Eimer, Feudel, Papiertuchrolle.

#### 3.1 Bestimmung der Viskosität eines Glycerin-Wasser-Gemisches mit der Kugelfallmethode

##### Hinweise:

- Die Mischungsverhältnisse der Glycerin-Wasser-Gemische sind bei den einzelnen Versuchsaufbauten nicht identisch. Da die Viskosität empfindlich vom Mischungsverhältnis und der Temperatur abhängt (s. Kap. 4.1 und 4.2), muss jede Praktikumsgruppe den gesamten Versuch bei möglichst konstanter Raumtemperatur mit dem Gemisch aus einem Vorratsbehälter durchführen! **Der Arbeitsplatz muss sauber verlassen werden!**

Mit einer Anordnung gemäß Abb. 7 soll die Fallbewegung von Stahlkugeln ( $d = 2r \approx 2$  mm) in einem Glycerin-Wasser-Gemisch mit dem Ziel untersucht werden, die Viskosität des Gemisches nach Gl. (11) zu bestimmen. Um den Einfluss der Reibungseffekte an der Gefäßwand quantifizieren zu können (s. Gl (13)), kommen Glaszylinder mit unterschiedlichem Radius  $R$  zum Einsatz.

Zur Vorbereitung des Versuches müssen zunächst folgende Größen bestimmt werden:

- Dichte  $\rho_F$  des Gemisches durch Wägung eines mit einem Messzylinder ermittelten Volumens auf der Laborwaage.
- Mittlerer Radius  $r$  der Kugeln durch Messung des Durchmessers von mindestens 10 Kugeln mit der Bügelmessschraube und anschließender Mittelwertbildung.
- Dichte  $\rho_K$  des Kugelmaterials durch Wägung von  $n$  Kugeln ( $n \geq 60$ ) auf der Analysenwaage.
- Radien  $R$  der verwendeten Glaszylinder durch Messung der Innendurchmesser mit dem Messschieber.
- Temperatur des Gemisches. Da die Viskosität stark temperaturabhängig ist, macht die Angabe eines Messergebnisses nur Sinn bei gleichzeitiger Angabe der Temperatur des Gemisches. Raumtemperatur während des Versuchs so konstant wie möglich halten!

Nach diesen Vorbereitungen wird das Glycerin-Wasser-Gemisch vorsichtig in sechs Glaszylinder mit unterschiedlichen Radien  $R$  eingefüllt (Blasenbildung vermeiden! Flüssigkeitspegel muss unter der Unterkante der Stopfen bleiben!)<sup>9</sup>. Anschließend werden die Zylinder im Gestell fixiert (Kunststoffschrauben vorsichtig festdrehen) und die Grundplatte des Gestells wird mit Hilfe einer integrierten Wasserwaage waagrecht ausgerichtet. Die Zylinder stehen dann senkrecht. Danach lässt man je 10 Kugeln zentral in die Zylinder fallen; zur Zentrierung wird ein passender, in der Mitte durchbohrter Stopfen benutzt (Abb. 7). Mit der Stoppuhr bestimmt man die Fallzeit  $t$  für eine Fallstrecke  $s$ , die durch die beiden horizontal angeordneten Haltebleche der Zylinder festgelegt ist ( $s$  mit dem Messschieber messen). Der Beginn der Fallstrecke (also das obere Halteblech) liegt einige cm unter der Flüssigkeitsoberfläche.

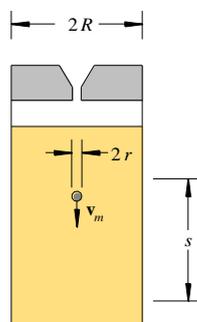


Abb. 7: Messanordnung zum Kugelfallversuch in Flüssigkeiten. Die Kugeln vom Radius  $r$  fallen durch den oberen durchbohrten Stopfen (grau). Dadurch soll gewährleistet werden, dass sie möglichst zentral in die Flüssigkeit (beige) fallen, die sich in einem Zylinder mit dem Innenradius  $R$  befindet.

<sup>9</sup> Dieser Arbeitsschritt wurde in der Regel schon von der technischen Assistenz vorab vorbereitet.

**Frage 2:**

- Warum darf die Fallstrecke nicht an der Flüssigkeitsoberfläche beginnen?

**Frage 3:**

- Warum ist es wichtig, dass die Kugeln zentral in die Zylinder fallen?

Für jeden Glaszylinder wird die Sinkgeschwindigkeit

$$(18) \quad v_m = \frac{s}{\bar{t}}$$

bestimmt, wobei  $\bar{t}$  der Mittelwert der gemessenen Fallzeiten für die je 10 Kugeln ist. Anschließend wird  $v_m$  über  $(r/R)^2$  aufgetragen (mit Fehlerbalken für  $v_m$ ) und eine Ausgleichsgerade durch die Messdaten gezeichnet. Der Schnittpunkt der Geraden mit der  $v_m$ -Achse ergibt die gesuchte Geschwindigkeit  $v_0$  für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit ( $R \rightarrow \infty$ ).

Mit den experimentell gewonnenen Daten  $v_0$ ,  $r$ ,  $\rho_K$  und  $\rho_F$  sowie der Erdbeschleunigung für Oldenburg ( $g = 9,8133 \text{ m/s}^2$ , Fehler vernachlässigbar<sup>10</sup>) wird die Viskosität  $\eta$  des Glycerin-Wasser-Gemisches nach Gl. (11) bestimmt und mit den Angaben aus Tab. 1 (Kap. 4.1) verglichen.

Nach Ende der Messung wird die Flüssigkeit vorsichtig (erneut Blasenbildung vermeiden!) aus den Glaszylindern in das Vorratsgefäß zurück gegossen. Gegen Ende werden die Kugeln mit einem Magneten zurückgehalten. Dabei wird ein Sieb benutzt um die Kugeln ggf. aufzufangen. Die in den Zylindern verbleibenden Kugeln werden mit einem Magneten herausgeholt. Die Kugeln werden in Wasser gereinigt und mit Haushaltspapier **gut** getrocknet (sonst besteht Rostgefahr!).

### 3.2 Bestimmung der kinematischen Viskosität mit dem Kapillarviskosimeter

Mit einem Kapillarviskosimeter nach UBBELOHDE soll die kinematische Viskosität von Ethanol bei Raumtemperatur bestimmt werden. Das Viskosimeter befindet sich in einem großen Wasserbad, das für die Dauer des Versuchs für eine konstante Temperatur (messen!) innerhalb der Kapillare sorgt. Von der technischen Assistenz wurde das Viskosimeter vor Versuchsbeginn senkrecht ausgerichtet und das Vorratsgefäß H über das Rohr 1 (s. Abb. 5) zu etwa  $\frac{3}{4}$  mit Ethanol gefüllt.

Rohr 3 wird mit dem Finger verschlossen. Mit Hilfe eines an Rohr 2 angeschlossenen Saugschlauches wird die Flüssigkeit in Rohr 2 mit einem bereitgestellten Peleus-Ball so weit hoch gesaugt, bis das Vorlaufgefäß G gefüllt ist. Anschließend werden Rohr 2 und 3 geöffnet und die Zeit  $\Delta t$  gemessen, in der der Flüssigkeitsspiegel von der Marke  $M_1$  bis zur Marke  $M_2$  absinkt. Anschließend wird die Messung dreimal wiederholt. Aus den Messdaten und den bereitliegenden Apparatekonstanten  $K$  und  $t_k$  wird die kinematische Viskosität  $\nu$  von Ethanol bei der im Wasserbad herrschenden Temperatur bestimmt und mit dem Literaturwert verglichen.

### 3.3 Bestimmung der REYNOLDSzahl für den Übergang von laminarer zu turbulenter Rohrströmung

Mit einer Anordnung nach Abb. 6 soll die REYNOLDSzahl für den Übergang von einer laminaren in eine turbulente Rohrströmung bestimmt werden. Zunächst wird der Tankzulauf (Wasserhahn) so weit geöffnet, dass der Wasserstand das Niveau der oberen Kante des Überlaufs während des Versuches gerade nicht unterschreitet. Der Schlauch am Ablauf des Rohres wird in das Abflussbecken gelegt. Der Hahn  $H_1$  am Ende des Rohres wird langsam geöffnet, bis Wasser am Rohrende abfließt. Bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit ist die Rohrströmung laminar. Anschließend wird der Hahn  $H_2$  so weit geöffnet, dass in dem Rohr ein dünner, glatter Stromfaden sichtbar wird. Danach wird der Hahn  $H_1$  langsam weiter bis zu der Stellung geöffnet, bei der die laminare in eine turbulente Rohrströmung umschlägt. Dies erkennt man daran, dass der Stromfaden zu „zittern“ beginnt.

Um die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  bei dieser Stellung des Hahnes  $H_1$  zu messen, wird für eine mit der Stoppuhr zu messende Zeit  $\Delta t$  ein Messzylinder unter den Abflussschlauch des Rohres gehalten und das ablaufende Wasser aufgefangen. Aus dem während der Zeit  $\Delta t$  aufgefangenen Wasservolumen  $V$ , dem

<sup>10</sup> Wert nach <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php> (15.10.2018); der Fehler von  $2 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$  wird vernachlässigt.

Innendurchmesser  $d$  des Rohres sowie der Dichte<sup>11</sup> und der Viskosität  $\eta$  des Wassers (s. Anhang 4.2) lässt sich  $v$  berechnen (s. Anhang 4.3, Gl. (20)) und damit schließlich die gesuchte REYNOLDSzahl  $Re$  bestimmen.

## 4 Anhang

### 4.1 Viskosität von Glycerin

Glycerin<sup>12</sup> ( $C_3H_8O_3$ ) ist *hygroskopisch*, d.h. wasseranziehend. Lässt man es längere Zeit offen stehen, so nimmt es aus der Umgebungsluft Feuchtigkeit auf, d.h. es entsteht ein Gemisch, dessen Wassergehalt im Laufe der Zeit zunimmt. Dieses Gemisch hat eine andere Viskosität als reines Glycerin. Zur Orientierung seien für eine Temperatur von 20° C einige Daten genannt:

Tab. 1: Viskosität von Glycerin/Wasser- Gemischen bei 20°C<sup>13</sup>.

$C_3H_8O_3$ Gew.-%	$H_2O$ Gew.-%	$\eta /$ $kg\ m^{-1}s^{-1}$
100	0	1,76
96	4	0,761
92	8	0,354
88	12	0,130
84	16	0,071
80	20	0,048

Darüber hinaus ist die Viskosität stark temperaturabhängig. Für reines Glycerin gilt bei  $T = 20\ ^\circ C$ :  $\eta = 1,76\ kg/(m\ s)$  (s.o.) und bei  $T = 25\ ^\circ C$ :  $\eta = 0,934\ kg/(m\ s)$ <sup>14</sup>

### 4.2 Viskosität von Wasser

Abb. 8 zeigt die Viskosität  $\eta$  von Wasser als Funktion der Temperatur  $T$ . Der Verlauf der Daten lässt sich im Temperaturbereich zwischen 10 °C und 35 °C in guter Näherung durch ein Polynom 4. Grades beschreiben ( $T$  in °C)<sup>13</sup>:

$$(19) \quad \eta \approx \left( 1,77721 - 0,05798 \{T\} + 0,00125 \{T\}^2 \right) 10^{-3} \frac{kg}{m\ s} - 1,66039 \cdot 10^{-5} \{T\}^3 + 9,814 \cdot 10^{-8} \{T\}^4$$

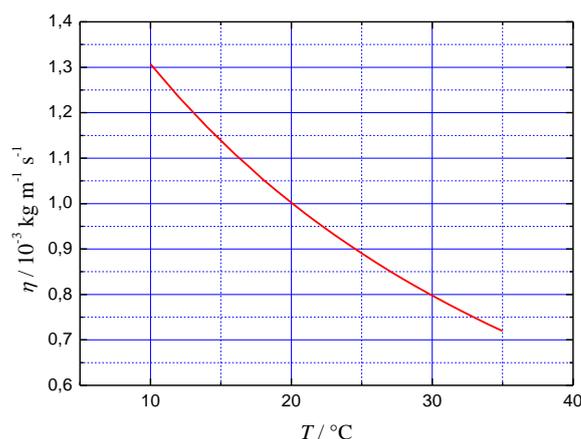


Abb. 8: Viskosität  $\eta$  von Wasser als Funktion der Temperatur  $T$ .

<sup>11</sup> Zur temperaturabhängigen Dichte von Wasser siehe Versuch „Oberflächenspannung...“.

<sup>12</sup> Weitere gebräuchliche Eigennamen von Glycerin sind Glycerol, Propan-1,2,3-triol u.a. Die Struktur wird durch  $C_3H_5(OH)_3$  beschrieben.

<sup>13</sup> Daten nach: WEAST, R. C. [Ed.]: „CRC Handbook of Chemistry and Physics“, 56<sup>th</sup> Ed., CRC Press, Boca Raton, 1975 - 1976. Alle Daten ohne Fehlerangaben.

<sup>14</sup> LIDE, D. R. [Ed.]: "CRC Handbook of Chemistry and Physics on CD-ROM", Taylor & Francis, Boca Raton, FL, 2006. Daten ohne Fehlerangaben.

### 4.3 Laminare Rohrströmung

In diesem Anhang wird dargestellt, wie die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  und ihr laterales Profil  $v(r)$  in einem zylindrischen Rohr quantitativ berechnet werden kann.<sup>15</sup>

Eine *ideale* Flüssigkeit ist *inkompressibel* und *frei von inneren Reibungskräften*. Wir betrachten gem. Abb. 9 eine solche Flüssigkeit, die durch ein sich verjüngendes horizontales Rohr strömt. Aus der *Inkompressibilität* der Flüssigkeit folgt, dass der *Volumenstrom*  $Q$  (durchströmendes Volumen pro Zeit) an jeder Stelle des Rohres gleich sein muss. Sind  $A_1$  die Querschnittsfläche des Rohres und  $v_1$  die Strömungsgeschwindigkeit im Rohr auf der linken Seite und  $A_2$  und  $v_2$  die entsprechenden Größen auf der rechten Seite, so bedeutet dies:

$$(20) \quad Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.}$$

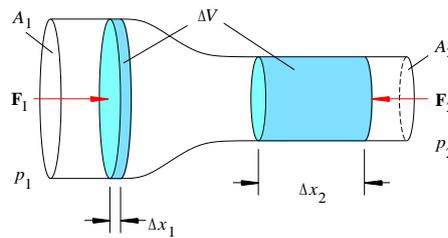


Abb. 9: Strömung durch ein sich verjüngendes horizontales Rohr. Bezeichnungen siehe Text.

Gl. (20) heißt *Kontinuitätsgleichung*.

Um ein Flüssigkeitsvolumen  $\Delta V$  in der linken Rohrseite um  $\Delta x_1$  nach rechts zu bewegen, muss durch den links herrschenden *statischen Druck*  $p_1$  die Arbeit  $W_1$  verrichtet werden:

$$(21) \quad W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V$$

Die erforderliche Arbeit  $W_2$  zur Bewegung des gleichen Volumens  $\Delta V$  durch die rechte Rohrseite gegen den statischen Druck  $p_2$  ist gegeben durch:

$$(22) \quad W_2 = F_2 \Delta x_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V$$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt, dass die Arbeitsdifferenz  $W_1 - W_2$  zu einer Zunahme der kinetischen Energie der Flüssigkeit (Dichte  $\rho$ ) im rechten Teil des Rohres führen muss. Sind  $m$  die Masse und  $v_1, v_2$  die Geschwindigkeiten der Volumina  $\Delta V$ , so folgt:

$$(23) \quad W_1 - W_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2$$

Nach Division durch  $\Delta V$  und Umsortieren der Terme folgt schließlich:

$$(24) \quad p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 := p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

Dies ist das *BERNOULLISCHE Gesetz*. Es besagt, dass unter den genannten Annahmen die Summe aus *statischem Druck*  $p$  und *Staudruck*  $\frac{1}{2} \rho v^2$  an jeder Stelle des Rohres konstant sein muss.

Für ein *senkrecht* statt horizontal stehendes Rohr muss der von der Höhe  $h$  abhängige *hydrostatische Druck*  $\rho g h$  mit berücksichtigt werden ( $g$  ist die Erdbeschleunigung). Dann lautet das *BERNOULLISCHE Gesetz*:

<sup>15</sup>  $r$  ist der laterale Abstand von der Längsachse des Rohres.

$$(25) \quad p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{const.}$$

In einem horizontalen Rohr mit konstantem Durchmesser, das von einer *idealen* Flüssigkeit durchströmt wird, sind Druck und Strömungsgeschwindigkeit im gesamten Rohr konstant. Bei einer *realen* Flüssigkeit mit der Viskosität  $\eta$  treten jedoch Reibungskräfte zwischen Flüssigkeit und Rohrmantel und zwischen den benachbarten Flüssigkeitsschichten auf. Diese Reibungskräfte bewirken, dass der Druck längs des Rohres abnimmt und die Strömungsgeschwindigkeit entlang des Rohrquerschnitts, also in lateraler Richtung variiert. Sie muss am Rohrrand null sein (denn dort haftet eine Grenzschicht der Flüssigkeit an der Wand) und in der Mitte ihren maximalen Wert annehmen.

Zur quantitativen Beschreibung des transversalen *Geschwindigkeitsprofils* einer *laminaren* Rohrströmung betrachten wir gem. Abb. 10 ein zylindrisches Rohr mit der Länge  $l$  und dem Radius  $r_0$ , das in  $z$ -Richtung von einer realen Flüssigkeit durchströmt wird. Innerhalb dieser Strömung betrachten wir einen coaxialen Flüssigkeitszylinder mit dem Radius  $r$  und der Mantelfläche  $A = 2\pi r l$ . Nach dem NEWTONSchen Reibungsgesetz ist die Reibungskraft  $F_R$  zwischen diesem Flüssigkeitszylinder und der angrenzenden Flüssigkeitsschicht proportional zur Mantelfläche  $A$  und zum Geschwindigkeitsgefälle  $dv/dr$ ; die Proportionalitätskonstante ist die Viskosität  $\eta$ . Es gilt also:

$$(26) \quad F_R = \eta A \frac{dv}{dr} = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}$$

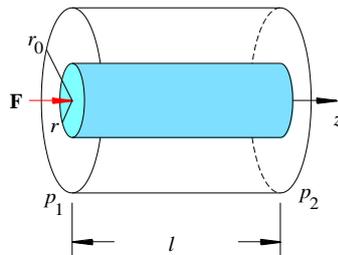


Abb. 10: Zylindrisches Rohr mit coaxialem Flüssigkeitszylinder vom Radius  $r$ . Links herrscht der Druck  $p_1$ , rechts der Druck  $p_2$ . Übrige Bezeichnungen siehe Text.

Im *stationären Fall* (zeitlich konstante Strömungsgeschwindigkeit) muss die Reibungskraft  $F_R$  für einen Flüssigkeitszylinder mit dem Radius  $r$  gerade gleich der treibenden Kraft  $F$  sein, die durch das Druckgefälle  $\Delta p = p_1 - p_2$  verursacht wird, also:

$$(27) \quad F = \pi r^2 \Delta p = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}$$

Daraus erhalten wir

$$(28) \quad \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta p}{2\eta l} r$$

bzw.

$$(29) \quad dv = \frac{\Delta p}{2\eta l} r dr$$

und schließlich durch Integration unter der Randbedingung  $v(r_0) = 0$  das gesuchte *Geschwindigkeitsprofil*  $v(r)$ :

$$(30) \quad v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (r_0^2 - r^2); \quad 0 \leq r \leq r_0$$

Das transversale Geschwindigkeitsprofil für eine laminare Strömung durch ein Rohr ist also *parabolisch* (s. Abb. 11).

Zur Berechnung des Volumens  $V$ , das innerhalb der Zeit  $\Delta t$  durch ein Rohr mit dem Radius  $r_0$  strömt, betrachten wir zunächst das Volumen  $dV$ , das innerhalb von  $\Delta t$  durch einen Hohlzylinder mit dem Innenradius  $r$  und dem Außenradius  $r + dr$  (s. Abb. 12) fließt. Dieser Hohlzylinder hat die Grundfläche  $A$  und die Länge  $\Delta l$ . Der Volumenstrom ist bei kleinem  $dr$  demnach gegeben durch:

$$(31) \quad \frac{dV}{\Delta t} = \frac{A \Delta l}{\Delta t} = 2\pi r dr \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

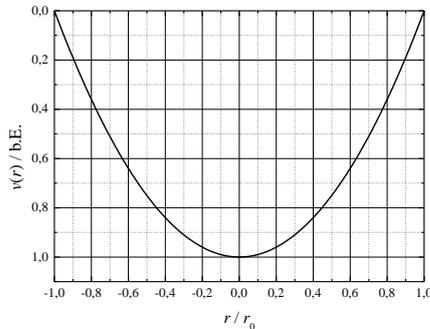


Abb. 11: Links: Berechnetes parabolisches Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Strömung durch ein zylindrisches Rohr mit dem Radius  $r_0$ . Rechts: Visualisierung eines parabolischen Geschwindigkeitsprofils in einem zylindrischen Plexiglasrohr (Durchmesser ca. 1 cm) mit Hilfe von eingefärbtem Kleister.<sup>16</sup>

Da sich die Flüssigkeit gleichförmig (d.h. ohne Beschleunigung) durch das Rohr bewegt, gilt für die Geschwindigkeit:

$$(32) \quad v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Damit wird aus Gl. (31) unter Verwendung von Gl. (30):

$$(33) \quad \frac{dV}{\Delta t} = 2\pi r dr v(r) = 2\pi r \frac{\Delta p}{4\eta l} (r_0^2 - r^2) dr$$

Aus dieser Gleichung lässt sich durch Integration das *Gesamtvolumen*  $V$  berechnen, das innerhalb der Zeit  $\Delta t$  durch das Rohr mit dem Radius  $r_0$  fließt:

$$(34) \quad \frac{V}{\Delta t} = \frac{\pi \Delta p}{2\eta l} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr$$

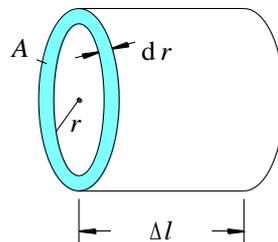


Abb. 12: Zur Definition geometrischer Größen eines Hohlzylinders.

und damit

$$(34) \quad V = \frac{\pi \Delta p \Delta t}{8\eta l} r_0^4$$

<sup>16</sup> Bildquelle: T. GREVE: „Aufbau und physikalische Betrachtung eines Durchlaufreaktors zur Hydrothermalen Karbonisierung“, Diplomarbeit, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Institut für Physik, AG Turbulenz, Windenergie und Stochastik (TWiST), 2009.

Dies ist das HAGEN-POISEUILLESche Gesetz<sup>17</sup> für *laminare* Strömungen. Diese liegen vor, wenn die REYNOLDSzahl  $Re$ , die in diesem Fall durch

$$(35) \quad Re = \frac{\bar{\rho} \bar{v} 2 r_0}{\eta} \quad (\rho: \text{Dichte der Flüssigkeit; } \bar{v}: \text{Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit nach Gl. (30))$$

gegeben ist, kleiner als ca. 2.000 - 2.500 ist.

#### 4.4 Kapillarviskosimeter

In diesem Anhang wird die Herleitung von Gl. (14) dargestellt.

Mit Hilfe des HAGEN-POISEUILLESchen Gesetzes (Gl. (34)) kann man die Viskosität von Flüssigkeiten bestimmen. Dazu bedient man sich so genannter *Kapillarviskosimeter*. Abb. 5 zeigt ein *Kapillarviskosimeter* nach UBBELOHDE. Durch eine Kapillare mit dem Radius  $r_0$  und der Länge  $l$  lässt man aus einem Vorratsbehälter B, vor dem sich ein Vorlaufgefäß G befindet, ein definiertes Flüssigkeitsvolumen  $V$  strömen, das durch das zwischen den Marken  $M_1$  und  $M_2$  eingeschlossene Volumen gegeben ist. Durch Messung der Zeitdifferenz  $\Delta t$ , in der der Flüssigkeitsspiegel von  $M_1$  nach  $M_2$  sinkt, lässt sich dann aus Gl. (34) die Viskosität  $\eta$  bestimmen:

$$(36) \quad \eta = \frac{\pi \Delta p r_0^4}{8 l V} \Delta t$$

Die Druckdifferenz  $\Delta p$  ist in diesem Fall gegeben durch den hydrostatischen Druck:

$$(37) \quad \Delta p(t) = \rho g h(t) \quad (\rho: \text{Dichte der Flüssigkeit; } g: \text{Erdbeschleunigung})$$

Dabei ist  $h(t)$  die Höhendifferenz zwischen dem momentanen Stand des Flüssigkeitsspiegels im Vorratsgefäß B und dem unteren Ende der Kapillare. Dass dieses Ende der Kapillare die Referenzhöhe bildet, erreicht man durch einen Trick: das Belüftungsrohr 3 (s. Abb. 5) sorgt dafür, dass im oben kugelförmig ausgebildeten Auslaufgefäß D Luftdruck herrscht. Dadurch läuft die Flüssigkeit in Form eines *dünnen Films* an der *Innenwand* von D ab.

Infolge der Zeitabhängigkeit der Höhe  $h(t)$  (sinkender Flüssigkeitsspiegel) ist auch  $\Delta p(t)$  zeitabhängig. Man kann  $h(t)$  jedoch durch einen geeigneten Mittelwert ersetzen. Diese *mittlere Höhe*  $h$  ist gegeben durch:

$$(38) \quad h = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} h(t) dt$$

Damit folgt aus Gl. (36):

$$(39) \quad \eta = \frac{\pi \rho g h r_0^4}{8 l V} \Delta t$$

Die Größe

$$(40) \quad K = \frac{\pi g h r_0^4}{8 l V}$$

ist eine *Apparatekonstante* und auf den Viskosimetern eingraviert ( $[K] = \text{m}^2/\text{s}^2$ ; meistens in  $\text{mm}^2/\text{s}^2$  angegeben). Damit ergibt sich für die Viskosität die einfache Beziehung aus Gl. (14):

$$(42) \quad \eta = K \rho \Delta t$$

<sup>17</sup> GOTTHILF HEINRICH LUDWIG HAGEN (1797 – 1884)