Berufsbegleitender Masterstudiengang
Risikomanagement für Finanzdienstleister (M.Sc.)

Center für lebenslanges Lernen

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Risikomodelle

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2018

Impressum

Autor: Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Herausgeber: Carl von Ossietzky Universität Oldenburg - Center für lebenslanges Lernen C3L

Auflage: 2. Auflage; Erstauflage 2016

Layout: Andreas Altvater, Franziska Vondrlik

Oldenburg, Januar 2018

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Akademischer Werdegang

- 1971-1977 Diplom-Studium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften an der RWTH Aachen
- 1977-1986 Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen
- 1980 Promotion zum Dr.rer.nat.
- 1984 Habilitation für Mathematik an der RWTH Aachen
- 1986-1987 Heisenberg-Stipendiat, diverse Gastaufenthalte in den USA
- 1987 Ernennung zum Universitätsprofessor (C3) für Mathematik an der Universität Oldenburg [Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften]
- 1995 Ernennung zum Universitätsprofessor (C4) für Mathematik an der Universität Hamburg [Versicherungsmathematik]
- 2000 Ernennung zum Universitätsprofessor (C4) für Mathematik an der Universität Oldenburg [Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie]

Akademische Nebentätigkeiten

- 1991-1995 Dozent an der Berufsakademie Oldenburger Münsterland e.V., Vechta
- 2003-2007 Mitglied des Vorstands der DGVFM (Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik)
- 2007-2013 Dozent für die Deutsche Aktuarvereinigung im Bereich Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden
- 2009-2013 Mitglied im Leitungsteam der ASTIN-Fachgruppe der DAV

Sonstige Nebentätigkeiten

- seit 1996 Wissenschaftlicher Berater für AON Benfield, Hamburg (ehemals Jauch & Hübener)
- seit 2006 Mitglied des Aufsichtsrats der Gegenseitigkeit Versicherung Oldenburg
- 2007-2014 Mitgründer und Mitgesellschafter der Unternehmensberatung acs actuarial solutions GmbH, Hamburg
- seit 2014 Mitgründer und Mitgesellschafter der Unternehmensberatung eAs efficient actuarial solutions GmbH, Hamburg

Aktuelle Schwerpunkte in Forschung und Lehre

Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie [insbesondere Copulas], Extremwertstatistik, Risikotheorie, Quantitatives Risikomanagement, aktuarielle Aspekte von Solvency II.

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

Eine quantitative Bewertung von Risiken geschieht üblicherweise im Rahmen von mathematischen Modellen, die wesentlich auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik beruhen. Die Anfänge solcher *Risikomodelle* gehen historisch schon auf **Gottfried Wilhelm Leibniz** zurück, der der im 17. Jahrhundert gegründeten Hamburger Feuerkasse (und damit der Sachversicherung) eng verbunden war. Der berühmte Mathematiker **Carl Friedrich Gauß** widmete sich Berechnungen für die Pensionskasse Göttinger Professoren, und es war der vielleicht ebenso bekannte Mathematiker **Felix Klein**, der an der Universität Göttingen Ende des 19. Jahrhunderts die Versicherungsmathematik in Forschung und Lehre einführte.

An Gymnasien und Lyzeen war es in Deutschland bis zum Ende des zweiten Weltkriegs üblich, die Grundlagen der Lebensversicherung – bis hin zur Berechnung von Deckungsrückstellungen – im Schulunterricht der Oberstufe zu behandeln.

In dem vorliegenden Modul *Risikomodelle* werden einige wichtige Grundlagen der **Versicherungs- und Finanzmathematik** behandelt, die zum Verständnis der Bewertung von Risiken in Versicherungsunternehmen und Banken unerlässlich sind.

Unter *Versicherung* versteht man aus betriebswirtschaftlicher Sicht die Deckung eines im Einzelnen ungewissen, insgesamt schätzbaren Mittelbedarfs auf der Grundlage des Risikoausgleichs im Kollektiv und in der Zeit. Anders ausgedrückt bedeutet dies den Eintausch eines (zufallsbehafteten) Risikos des Versicherungsnehmers (VN) gegen eine (deterministische) Prämie an das Versicherungsunternehmen (VU), welches sich dadurch zur Übernahme der mit dem Risiko verbundenen Ansprüche oder Leistungen verpflichtet. Der VN erkauft sich damit einen gewissen finanziellen Schutz, da die in der Regel vergleichsweise kostengünstige Versicherungsprämie in ihrer Größenordnung bekannt und damit für den VN kalkulierbar ist, i. Allg. nicht jedoch die mögliche Belastung in einem Schadenfall (z.B. nicht gedeckte Hypothek für eine Immobilie nach einem Todesfall, Kosten einer aufwändigen Operation nach einem Unfall, Beschädigung oder Verlust eines Gebäudes durch einen Brandschaden usw.) Die mit solchen Risiken verbundenen finanziellen Gefahren kann das VU auf der anderen Seite nur durch Verteilung auf viele Versicherte (Ausgleich im Kollektiv) bzw. den Umstand der Nicht-Gleichzeitigkeit aller Schadenfälle (Ausgleich in der Zeit) minimieren.

Traditionell unterscheidet man die Versicherungsgeschäfte nach Personenversicherung (z.B. Lebens-, Kranken- und Pensionsversicherung), Sachversicherung (z.B. Feuerversicherung, Elementarschadenversicherung), Vermögensversicherung (z.B. Haftpflichtversicherung) und Rückversicherung (das ist die *Versicherung der Versicherer*). In jüngerer Zeit werden verstärkt auch alternative Versicherungskonzepte eingesetzt, die mit Instrumenten des Kapitalmarks arbeiten (Stichworte: Index- und Fondsgebundene Lebensversicherung, Captives, Catastrophe Bonds und -Futures/Options, Securitisation, Alternative Risk Transfer).

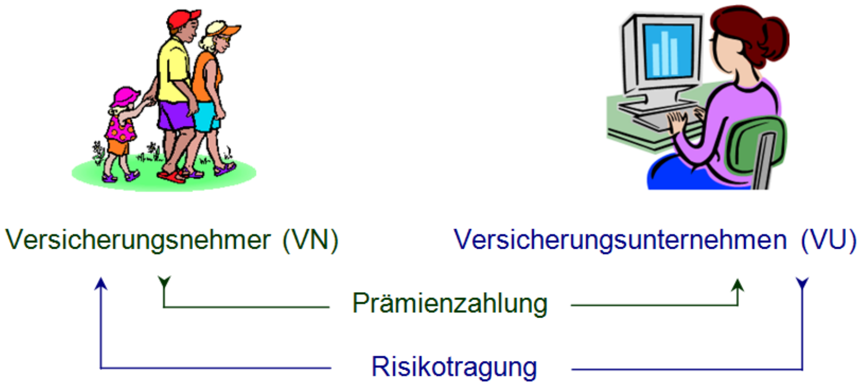
Naturgemäß fällt damit die Risikotheorie und speziell die Versicherungsmathematik als Grundlage der Prämienkalkulation und der Risikomodellierung in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechung und Statistik; zu ihren Themenschwerpunkten zählen insbesondere die Schätzung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und deren Parametern für die einzelnen Risiken (etwa auf der Basis von Sterbe- und Invaliditätstafeln im Bereich der Personenversicherungsmathematik oder von Schadenfrequenz- und Schadenhöhenverteilungen im Bereich der Sach- und Rückversicherung), die Modellierung von zeitabhängigen Risikoprozessen (insbesondere im Zusammenhang mit der Problematik von langfristigen Abwicklungen von Schadenfällen [Loss Reserving] und in der sog. Ruintheorie) oder die auf der zeitlichen Schadenerfahrung basierende Prämiendifferenzierung (Credibility Theory [Bayes-Verfahren], Bonus-Malus-Systeme [z.B. im Kfz-Haftpflichtbereich]).

Die *Versicherungsmathematik* zählt aufgrund ihrer großen wirtschaftlichen und sozialpolitischen Bedeutung daher mit zu den ältesten angewandten mathematischen Disziplinen.

In neuerer Zeit steht die mathematische *Finanzmathematik* in gleicher Weise im Fokus der Öffentlichkeit. Ihre Grundlagen gehen u.a. auf eine Arbeit von *Louis Bachelier* aus dem Jahr 1900 zurück, der ein stochastisches Modell für Aktienkursentwicklungen behandelt hat. Der Beginn der modernen Finanzmathematik ist untrennbar mit den Namen von *Fisher Black, Robert C. Merton und Myron S. Scholes* verbunden, die für ihre bahnbrechenden Arbeiten zur Bewertung von Finanzderivaten den Nobelpreis für Ökonomie im Jahr 1997 erhalten haben. Ihre Theorie wird heute üblicherweise im Rahmen von stochastischen Differenzialgleichungen behandelt, die auch die Grundlage für *Zinsstrukturmodelle* unter Basel II/III und Solvency II sind.

KAPITEL I:
DAS PRINZIP DER VERSICHERUNG

I. DAS PRINZIP DER VERSICHERUNG



Äquivalenzprinzip der Versicherung:

Erwartungswert des Barwerts der Prämien = Erwartungswert des Barwerts der Leistungen

Versicherung ist:

- „die Beseitigung des Risikos eines Einzelnen durch Beiträge von Vielen“ (Alfred Manes).
- „die planmäßige Deckung eines im einzelnen ungewissen, im ganzen aber schätzbaren Geldbedarfs auf der Grundlage eines zwischenwirtschaftlichen Risikoausgleichs“ (Karl Hax).
- „die Deckung eines im Einzelnen ungewissen, insgesamt schätzbaren Geldbedarfs auf der Grundlage eines Risikoausgleiches im Kollektiv und in der Zeit“ (Dieter Farny).

Mathematische Grundlagen:

- Das „Gesetz der großen Zahlen“ (Jakob Bernoulli, um 1695)
  - ➢ Äquivalenzprinzip der Versicherung, Risikoausgleich im Kollektiv und in der Zeit
- Der „zentrale Grenzwertsatz“ (Abraham de Moivre, 1733)
  - ➢ Ruinwahrscheinlichkeit, Solvabilitäts-Aspekte

Personenversicherungsarten:

- Lebensversicherung (LV)
  - Risiko-LV („reine Todesfall-Versicherung“)
  - Erlebensfallversicherung (“Sparversicherung“)
  - Kapital-LV („gemischte Versicherung“)

- (private) Krankenversicherung (PKV)
- (private) Rentenversicherung (PRV)
- betriebliche Altersversorgung (bAV)

➢ Die Unfallversicherung gehört rechtlich zur Sachversicherung!

Für die (private) Personenversicherung gelten folgende Grundsätze:

- Gleichen Leistungen stehen in einem homogenen Kollektiv gleiche Prämien gegenüber (im Gegensatz z.B. zur gesetzlichen KV).
- Gebot der Konstanz der Prämie: LV-Prämien bleiben auch bei zeitlich veränderlichen Risiken über die Vertragslaufzeit konstant (Ausnahme: PKV mit „auslösenden Faktoren“ für Beitragsanpassungen).
    - Konsequenz: VU muss geeignete Rückstellungen (Deckungs-, Alterungsrückstellungen) bilden, die keinen Ertrag/Gewinn darstellen!

KAPITEL II:
DIE BEWERTUNG VON ZAHLUNGSSTRÖMEN

II. DIE BEWERTUNG VON ZAHLUNGSSTRÖMEN

Grundlegende Annahmen:

- Ein- und Auszahlungen K_j erfolgen zu festen äquidistanten Zeitpunkten $j = 0, 1, \cdots, n$ (z.B. jährlich, monatlich)
- der Zinssatz i innerhalb der einzelnen Perioden bleibt konstant
- die Verzinsung erfolgt grundsätzlich zum Ende der jeweiligen Perioden

Die Größe $r = 1 + i$ heißt *Zinsfaktor*, die Größe $v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i}$ *Diskontfaktor*.

Häufig wird auch die Größe $d = 1 - v$ betrachtet [*Diskont* auf ein Kapital der Höhe 1].

Zur Herleitung der zugehörigen Bewertungsformeln:

$$\begin{array}{lcccccccl}
\text{Zahlungszeitpunkt} & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & & \\
 & K_0 & rK_0 & r^2K_0 & r^3K_0 & \cdots & r^nK_0 & & \text{Wertentwicklung von } K_0 \\
 & & K_1 & rK_1 & r^2K_1 & \cdots & r^{n-1}K_1 & & \text{Wertentwicklung von } K_1 \\
 & & & K_2 & rK_2 & \cdots & r^{n-2}K_2 & & \text{Wertentwicklung von } K_2 \\
 & & & & K_3 & \cdots & r^{n-3}K_3 & & \text{Wertentwicklung von } K_3 \\
 & & & & & \vdots & & & \\
 & & & & & & K_n & & \\
\hline
 & & & & & & \sum_{j=0}^{n} r^{n-j}K_j & & \text{Wertentwicklung gesamt}
\end{array}$$

Der sog. *Endwert* W_n des durch die Zahlungen $K_0, \cdots, K_n$ gegebenen Finanzstroms ist gegeben durch die Beziehung:

$$W_n = \sum_{j=0}^{n} r^{n-j} K_j.$$

Durch Diskontierung mit dem Faktor v^n erhält man hieraus den sog. *Barwert* B_n des Finanzstroms:

$$B_n = v^n \sum_{j=0}^{n} r^{n-j} K_j = \sum_{j=0}^{n} v^j K_j.$$

In praktischen Anwendungen unterscheidet man noch die Fälle $K_0 = 0$ (*nachschüssige* Zahlungsweise) und $K_n = 0$ (*vorschüssige* Zahlungsweise).

Beispiel 1:

Ein Sparer zahlt zum 1.1.2010 den Betrag von € 1.000,- auf ein Sparkonto ein, zum 1.1.2011 und 1.1.2012 jeweils den Betrag von € 2.000,- und hebt ohne weitere Zuzahlungen zum 31.12.2013 den Betrag von € 3.000,- ab. Der jährliche Zins betrage $i = 3\%$, also $i = 0{,}03$. Wie groß ist der Barwert des zum 31.12.2013 verbleibenden Kapitals?

Nach der obigen Bewertungsformel ergibt sich der Barwert (gerundet) mit $n = 4$, $K_0 = 1.000$, $K_1 = K_2 = 2.000$, $K_3 = 0$ und $K_4 = -3.000$ zu

$$B_4 = \sum_{j=0}^{4} v^j K_j = 1.000 + v \cdot 2.000 + v^2 \cdot 2.000 - v^4 \cdot 3.000 = 2.161{,}48.$$

Der Sparer hätte also auch zum 1.1.2010 den Betrag von € 2.161,48 als Einmaleinlage einzahlen können, um zum 31.12.2013 auf denselben Endwert von € 2.432,76 zu kommen.

Symbole und Konversionen:

$$a_{\overline{n}|} := v + v^2 + \cdots + v^n = \sum_{k=1}^{n} v^k = v\frac{1-v^n}{1-v}$$

Barwert einer n – periodigen *nachschüssigen* Rente der Höhe 1

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} := 1 + v + \cdots + v^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1-v^n}{1-v}$$

Barwert einer n – periodigen *vorschüssigen* Rente der Höhe 1

$$s_{\overline{n}|} := r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - 1}{r-1} = \frac{r^n - 1}{i}$$

Endwert einer n – periodigen *nachschüssigen* Rente der Höhe 1

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} := r^n + r^{n-1} + \cdots + r = \sum_{k=1}^{n} r^k = r\frac{r^n - 1}{r-1} = r\frac{r^n - 1}{i}$$

Endwert einer n – periodigen *vorschüssigen* Rente der Höhe 1

	$\ddot{a}_{\overline{n}\|}$	$a_{\overline{n}\|}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\|}$	$s_{\overline{n}\|}$	v^n	r^n
$\ddot{a}_{\overline{n}\|} =$		$r\,a_{\overline{n}\|}$	$\frac{\ddot{s}_{\overline{n}\|}}{1+d\,\ddot{s}_{\overline{n}\|}}$	$\frac{r\,s_{\overline{n}\|}}{1+i\,s_{\overline{n}\|}}$	$\frac{1-v^n}{d}$	$\frac{r^n-1}{r^n d}$
$a_{\overline{n}\|} =$	$v\,\ddot{a}_{\overline{n}\|}$		$\frac{v\,\ddot{s}_{\overline{n}\|}}{1+d\,\ddot{s}_{\overline{n}\|}}$	$\frac{s_{\overline{n}\|}}{1+i\,s_{\overline{n}\|}}$	$\frac{1-v^n}{i}$	$\frac{r^n-1}{r^n i}$
$\ddot{s}_{\overline{n}\|} =$	$\frac{\ddot{a}_{\overline{n}\|}}{1-d\,\ddot{a}_{\overline{n}\|}}$	$\frac{r\,a_{\overline{n}\|}}{1-i\,a_{\overline{n}\|}}$		$r\,s_{\overline{n}\|}$	$\frac{1-v^n}{v^n d}$	$\frac{r^n-1}{d}$
$s_{\overline{n}\|} =$	$\frac{v\,\ddot{a}_{\overline{n}\|}}{1-d\,\ddot{a}_{\overline{n}\|}}$	$\frac{a_{\overline{n}\|}}{1-i\,a_{\overline{n}\|}}$	$v\,\ddot{s}_{\overline{n}\|}$		$\frac{1-v^n}{v^n i}$	$\frac{r^n-1}{i}$
$v^n =$	$1-d\,\ddot{a}_{\overline{n}\|}$	$1-i\,a_{\overline{n}\|}$	$\frac{1}{1+d\,\ddot{s}_{\overline{n}\|}}$	$\frac{1}{1+i\,s_{\overline{n}\|}}$		$\frac{1}{r^n}$
$r^n =$	$\frac{1}{1-d\,\ddot{a}_{\overline{n}\|}}$	$\frac{1}{1-i\,a_{\overline{n}\|}}$	$1+d\,\ddot{s}_{\overline{n}\|}$	$1+i\,s_{\overline{n}\|}$	$\frac{1}{v^n}$	

Beispiel 2:

Ein Studierender, der heute seinen 20. Geburtstag feiert, möchte durch eine Einmalzahlung auf einen Sparvertrag einen Beitrag zu seiner Alterssicherung leisten. Gedacht ist an eine 25-jährige monatliche vorschüssige Rente der Höhe € 1.000,-, beginnend mit dem vollendeten 65. Lebensjahr. Welchen Betrag muss er jetzt einzahlen, wenn das Kreditinstitut einen Jahreszins von 4% für die gesamte Laufzeit (also bis zum 90. Lebensjahr) garantiert?

Der Barwert der vorschüssigen Rente (vereinfachend angenommen: jährliche Höhe $R = 12.000$) zum Abschluss des 65. Lebensjahres beträgt

$$\ddot{a}_{\overline{25}|} \cdot R = 12.000 \frac{1-v^{25}}{1-v} = 12.000 \frac{1-1/1{,}04^{25}}{1-1/1{,}04} = 194.963{,}56.$$

Für die notwendige Einmalzahlung muss dieser Betrag noch über 45 Jahre diskontiert werden, d.h. als Barwert B ergibt sich

$$B = v^{45} \ddot{a}_{\overline{25}|} \cdot R = 33.377{,}45.$$

Zur Finanzierung des nominalen Gesamtbetrags aller zukünftigen Rentenzahlungen in Höhe von $25 \cdot 12.000\,€ = 300.000\,€$ ist also heute (nur) ein einmaliger finanzieller Aufwand von etwa 11% dieser Summe erforderlich.

Natürlich spielt der garantierte Zinssatz hier eine wesentliche Rolle. Die nachfolgende Tabelle zeigt, welche Barwerte (Einmalzahlungen) sich bei unterschiedlichen Zinssätzen ergeben.

Zinssatz i	2%	3%	4%	5%	6%
Barwert B (in €)	98.023,54	56.914,20	33.377,45	19.764,45	11.813,21

Hat man umgekehrt nur einen bestimmten Betrag K für die Einmalzahlung zur Verfügung, so kann man aus der Gleichung

$$K = R \cdot v^{45} \frac{1-v^{25}}{1-v} \quad \text{bzw.} \quad v^{70} - v^{45} - \frac{K}{R}v + \frac{K}{R} = 0$$

den Diskontfaktor v und damit den notwendigen Zinssatz i berechnen. Die folgende Tabelle zeigt, welchen Zinssatz man bei verschiedenen Werten von K (bei $R = 12.000$) benötigt.

Einmalzahlung K (in €)	5.000	10.000	15.000	20.000	25.000	30.000
Zinssatz i (in %)	7,710	6,327	5,533	4,977	4,549	4,202

Beispiel 3:

(Annuitätentilgung einer Hypothek) Die obigen Formeln können auch dazu verwendet werden, um Tilgungspläne für Hypotheken H mit konstanter Annuität A zu berechnen. Dazu setzen wir $K_0 = -H$ (Auszahlung der Hypothek H zur Zeit 0) und $K_1 = K_2 = \ldots = K_n = A$ (Einzahlungen der Annuität A am Ende der jeweiligen Periode). Die Bedingung für die vollständige Tilgung der Hypothek einschließlich sämtlicher anfallender Zinszahlungen lautet dann

$$0 = W_n = -r^n H + A\sum_{k=0}^{n-1} r^k = -r^n H + \frac{r^n - 1}{r-1}A, \text{ also } A = \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}H = \frac{r^n}{s_{\overline{n}|}}H.$$

Die Annuität kann dabei je Periode zerlegt werden in einen Tilgungsanteil T_k und einen Zinsanteil Z_k, für die analog gilt:

$$T_k = r^{k-n-1}A = v^{n+1-k}A,\ Z_k = A - T_k = \left(1 - v^{n+1-k}\right)A,\ k = 1, \cdots, n$$

mit der jeweiligen Restschuld H_k am Ende der Periode k, gegeben durch

$$H_k = \frac{r^n - r^k}{r^n - 1}H,\ k = 1, \cdots, n.$$

Die folgende Tabelle gibt beispielhaft einen Tilgungsplan wieder für die Situation $H = 100.000$ € bei $n = 10$ Jahren Laufzeit und 4% Jahreszins, woraus sich nach obiger Formel der Wert $A = 12.329,09$ € für die Annuität ergibt.

Ende Jahr	Vorschuld	Annuität	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Restschuld
1	100000,00	12329,09	4000,00	8329,09	91670,91
2	91670,91	12329,09	3666,84	8662,26	83008,65
3	83008,65	12329,09	3320,35	9008,75	73999,90
4	73999,90	12329,09	2960,00	9369,10	64630,80
5	64630,80	12329,09	2585,23	9743,86	54886,94
6	54886,94	12329,09	2195,48	10133,62	44753,32
7	44753,32	12329,09	1790,13	10538,96	34214,36
8	34214,36	12329,09	1368,57	10960,52	23253,84
9	23253,84	12329,09	930,15	11398,94	11854,90
10	11854,90	12329,09	474,20	11854,90	0,00