

Berufsbegleitender Masterstudiengang

Risikomanagement für Finanzdienstleister (M.Sc.)



Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Spezielle Themen des Risikomanagements

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2019

Impressum

Autor: Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Herausgeber: Carl von Ossietzky Universität Oldenburg - Center für lebenslanges Lernen C3L

Auflage: Erste Auflage 2016

Layout: Andreas Altvater, Franziska Vondrlík

Copyright: Vervielfachung oder Nachdruck auch auszugsweise zum Zwecke einer Veröffentlichung durch Dritte nur mit Zustimmung der Herausgeber, 2019

Oldenburg, Januar 2019

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer



Akademischer Werdegang

- 1971-1977 Diplom-Studium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften an der RWTH Aachen
- 1977-1986 Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen
- 1980 Promotion zum Dr.rer.nat.
- 1984 Habilitation für Mathematik an der RWTH Aachen
- 1986-1987 Heisenberg-Stipendiat, diverse Gastaufenthalte in den USA
- 1987 Ernennung zum Universitätsprofessor (C3) für Mathematik an der Universität Oldenburg [Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften]
- 1995 Ernennung zum Universitätsprofessor (C4) für Mathematik an der Universität Hamburg [Versicherungsmathematik]
- 2000 Ernennung zum Universitätsprofessor (C4) für Mathematik an der Universität Oldenburg [Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie]
- Seit Oktober 2016 im Ruhestand

Akademische Nebentätigkeiten

- 1991-1995 Dozent an der Berufsakademie Oldenburger Münsterland e.V., Vechta
- 2003-2007 Mitglied des Vorstands der DGVFM (Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik)
- 2007-2013 Dozent für die Deutsche Aktuarvereinigung im Bereich Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden
- 2009-2013 Mitglied im Leitungsteam der ASTIN-Fachgruppe der DAV

Sonstige Nebentätigkeiten

- 1996-2016 Wissenschaftlicher Berater für den Rückversicherungsmakler AON Benfield, Hamburg (ehemals Jauch & Hübener)
- seit 2006 Mitglied des Aufsichtsrats der Gegenseitigkeit Versicherung Oldenburg
- 2007-2014 Mitgründer und Mitgesellschafter der Unternehmensberatung acs actuarial solutions GmbH, Hamburg
- 2014 – 2018 Mitgründer und Mitgesellschafter der Unternehmensberatung eAs efficient actuarial solutions GmbH, Hamburg

Schwerpunkte in Forschung und Lehre

Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie [insbesondere Copulas], Extremwertstatistik, Risikotheorie, Quantitatives Risikomanagement, aktuarielle Aspekte von Solvency II.

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG.....	4
I. EXTREMWERTVERTEILUNGEN	8
II. ORDNUNGSSTATISTIKEN	18
III. DER POT-ANSATZ UND VERALLGEMEINERTE PARETO-VERTEILUNGEN.....	23
IV. SCHÄTZVERFAHREN FÜR EXTREMWERTVERTEILUNGEN, HILL-PLOTS	33
V. GRUNDZÜGE GEOPHYSIKALISCHER NATURGEFAHRENMODELLE	41
VI. DERIVATE UND IHRE BEWERTUNG	51
LITERATURVERZEICHNIS	69

EINFÜHRUNG

In diesem Modul werden einige speziellere Aspekte des Risikomanagements bei Banken und Versicherungen behandelt, die inhaltlich auf anderen, eher grundsätzlichen Modulen aufbauen. Ein Schwerpunkt dieses Moduls bilden die mathematisch-statistischen Grundlagen für das Management operationaler Risiken mit Bezügen zur Extremwertstatistik, speziell den POT-Methoden, die auch für die Modellierung von Extremereignissen im Naturgefahrenbereich bei Versicherungen eine große Rolle spielen. Deshalb werden hier ebenfalls die Grundlagen sogenannter geophysikalischer Modelle behandelt, die insbesondere von Rückversicherern – oft unter Verwendung kommerzieller Software – angewendet werden, um entsprechende Rückversicherungsverträge mit Sachversicherungsunternehmen zu tarifieren. Schlussendlich werden in diesem Modul einige Grundlagen der stochastischen Finanzmathematik vertieft, wobei das Hauptaugenmerk auf der arbitragefreien Preisfindung für Derivate liegt.

Zum Thema operationale Risiken schreibt Heinrich Rommelfanger in einem Geleitwort:

»Operationelle Risiken, d. h. Risiken aus fehlerhaften Prozessen und Systemen, externen Ereignissen und menschlichem Versagen, sind in den letzten Jahren verstärkt in den Blickpunkt von Unternehmen gerückt. Insbesondere im Bankenbereich wurden in den letzten Jahren große Fortschritte im Managen von operationellen Risiken gemacht. Dies steht in Zusammenhang mit dem Inkrafttreten der neuen Basler Eigenkapitalvereinbarung im Jahre 2007, in der Banken erstmals dazu angehalten werden, sich mit diesem Thema stärker auseinanderzusetzen und auch für Operationelle Risiken Eigenkapital zu hinterlegen.

Ein erstes Problem beim Managen operationeller Risiken ist die schlechte Datenlage, da operationelle Risiken in der Vergangenheit als »nicht bedeutsam« vernachlässigt wurden. Dies ist menschlich auch nachvollziehbar, da niemand gerne eigene Fehler eingesteht, Kollegen »anschwärzt« oder allgemein ein düsteres Bild der Lage wiedergibt. Für ein gutes Risikomanagement ist aber eine umfassende Identifizierung und Quantifizierung der operationellen Risiken unverzichtbar. Es stellt sich daher die Frage, wie die Datengewinnung organisiert und die Mitarbeiter aller Hierarchiestufen davon überzeugt werden können, wahrheitsgemäß über operationelle Risiken zu berichten.

Ein zweiter wichtiger Punkt ist die Organisation des Risikomanagements im Unternehmen. Zu klären ist, ob die Organisationsstruktur eher zentral oder stärker dezentral aufgebaut werden soll und wer für die einzelnen Prozessschritte zuständig ist.

Liegen ausreichend viele interne und externe Verlustdaten zu operationellen Risiken vor, dann stellt sich die Frage nach geeigneten Systemen zur Modellierung von Abhängigkeiten, Verlusthöhen und -häufigkeiten. Auch ist zu klären, wie interne Risikomodelle bei der Gesamtrisikosteuerung zu berücksichtigen sind. « (M. Auer (2008), S. 9)

Zum gleichen Thema schreiben Anna Chernobai et al.:

»Often in financial institutions when there is a discussion of risk management, the two major risks identified are credit risk and market risk. Risks not attributable to either of these two risks are labelled other risks and, unfortunately, do not receive the same level of attention as credit risk and market risk. As we explain in Chapter 1, a number of prominent financial institutions have been shaken by losses in excess of \$1 billion each in the past couple of decades. Even worse, many of these failures resulted in bankruptcies. None of these losses, however, were due to credit risk or market risk. Rather, they were attributable to operational risk, one of the risks that has been historically lumped into other risks. The irony is that operational risk, which is at the core of these high-profile failures, appears to be, at least in part, a byproduct of the recent

rapid technological innovation, revolutionary advances in information network, financial de-regulation, and globalization.

The banking system has faced the painful reality that it is not sufficiently prepared to handle operational risk. Many banks now share the opinion of Roger Ferguson (who served as the vice chairman of the board of governors of the Federal Reserve System from 2001 to 2006), who said in 2003, "In an increasingly technologically driven banking system, operational risks have become an even larger share of total risk. Frankly, at some banks, they are probably the dominant risk."

As a drastic countermeasure, the Basel Committee for Banking Supervision introduced an amendment to the Basel Capital Accord to support operational risk with regulatory capital and outlined several measurement approaches in 2001. The implementation of the Basel II Capital Accord has begun in 2007 for all internationally active banks (with a few exceptions and some transitional adjustments). « (A. Chernobai et al. (2007), S. XV f.)

Mit Bezug auf die neuen aufsichtsrechtlichen Anforderungen unter Solvency II führt Wim van de Kraats aus:

»Operational risk is as old as the human race and has always been managed, but nevertheless is considered as a relatively young risk category by many risk professionals. There can be many reasons for this, but one of the most plausible arguments would be that an internal control framework combined with a strong audit function has long been considered sufficient.

As financial institutions grew larger and operational failures occurred that had a very large impact, such as the collapse of the Barings Bank due to fraud, regulators stepped in with requirements for operational risk management. As absolute assurance cannot be provided on the effectiveness of an internal control framework, holding capital for operational risk seemed a logical next step. This approach has been difficult to put into practice, however, due to lack of data, which triggered the need to start collecting loss information, and expert judgement still cannot be avoided when assessing operational risk.

At the same time, companies started working on frequent selfassessments of operational risks and controls by the business. In addition, they endeavoured to supplement loss data collection with root-cause analyses to ensure proper lessons were learned from risk events. Finally, companies monitored developments in operational risk exposure at an early stage through a concise but meaningful set of key risk indicators. « (in: R. Doff (2014), S. 209 f.)

Zur Bedeutung einer wissenschaftlich soliden Naturgefahrenmodellierung führen Patricia Grossi et al. aus:

»Catastrophe modeling is not rooted in one field or discipline. The science of assessing and managing catastrophe risk originates in the fields of property insurance and the science of natural hazards. Insurers may well argue that catastrophe modeling's history lies in the earliest days of property insurance coverage for fire and lightning. In the 1800's, residential insurers managed their risk by mapping the structures that they covered. Not having access to Geographic Information Systems (GIS) software, they used tacks on a wall-hung map to indicate their concentration of exposure. This crude technique served insurers well and limited their risk. Widespread usage of mapping ended in the 1960's when it became too cumbersome and time-consuming to execute.

On the other hand, a seismologist or meteorologist may well argue that the origin of catastrophe modeling lies in the modern science of understanding the nature and impact of natural hazards. In particular, the common practice of measuring an earthquake's magnitude and a hurricane's intensity is one of the key ingredients in catastrophe modeling. A standard set of metrics for a given hazard must be established so that risks can be assessed and managed. This measurement began in the 1800's, when the first modern seismograph (measuring earthquake ground motion) was invented and modern versions of the anemometer (measuring wind speed) gained widespread usage.

In the first part of the twentieth century, scientific measures of natural hazards advanced rapidly. By the 1970's, studies theorizing on the source and frequency of events were published. Significant analyses include the U.S. Water Resources Council publication on flood hazard (US-WRC, 1967), the Algermissen study on earthquake risk and National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) hurricane forecasts. These developments led U.S. researchers to compile hazard and loss studies, estimating the impact of earthquakes, hurricanes, floods, and other natural disasters. Notable compilations include Brinkmann's summary of hurricane hazards in the United States and Steinbrugge's anthology of losses from earthquakes, volcanoes, and tsunamis.

These two separate developments – mapping risk and measuring hazard – came together in a definitive way in the late 1980's and early 1990's, through *catastrophe modeling*. Computer-based models for measuring catastrophe loss potential were developed by linking scientific studies of natural hazards' measures and historical occurrences with advances in information technology and geographic information systems (GIS). The models provided estimates of catastrophe losses by overlaying the properties at risk with the potential natural hazard(s) sources in the geographic area. With the ability to store and manage vast amounts of spatially referenced information, GIS became an ideal environment for conducting easier and more cost-effective hazard and loss studies.

Around the same time, several new modeling firms developed computer software for analyzing the implications of natural hazard risk. Three major firms emerged: AIR Worldwide was founded in 1987 in Boston; Risk Management Solutions (RMS) was formed in 1988 at Stanford University; and EQECAT began in San Francisco in 1994 as a subsidiary of EQE International. « (in: P. Grossi et al. (2005), S. 23 f.)

Der folgende Auszug aus einem in der Schweiz verwendeten Schulbuch zeigt, dass operationale Risiken auch mit Derivaten und deren Bewertung zu tun haben können:

»Um 1990 gab es nur wenige Nichtfachleute, die Optionen als Finanzinstrument kannten. Das ist nicht weiter verwunderlich, wenn man bedenkt, dass in den meisten Ländern - unter anderem auch in der Schweiz - der professionelle Handel mit Optionen in grösserem Umfang an eigens dafür eingerichteten Börsen erst zwischen 1980 und 1990 einsetzte.

Im Jahr 1995 erlangten Optionen schlagartig eine zweifelhafte Berühmtheit. Am Montag, 27. Februar 1995, sorgte ein 28-jähriger Bankangestellter aus England namens Nick Leeson weltweit für Schlagzeilen. Er hatte die traditionsreiche angesehene englische Privatbank Barings im Alleingang in den Bankrott getrieben. Barings hatte allein wegen Leeson innerhalb weniger Wochen einen Verlust von über 1 Milliarde Dollar erlitten.

Leeson war für Barings an der Börse von Singapur als Händler tätig. Ende 1994 verkaufte er unter anderem in grosser Zahl so genannte Put-Optionen auf den japanischen Börsenindex Nikkei. Mit dem Verkauf dieser Optionen schloss Leeson eine Wette auf die zukünftige Entwicklung des Nikkei-Index ab:

Falls der Nikkei-Index in den kommenden Monaten in etwa stabil bleibt oder gar steigt, gewinnt Leeson die Wette. Er kann dann die aus dem Verkauf der Optionen eingenommenen Prämien als Gewinn verbuchen.

Falls der Nikkei-Index dagegen unter eine bestimmte Marke sinkt, verliert Leeson die Wette. Sein Verlust ist umso grösser, je stärker der Kurs unter die Marke sinkt. Für Leeson würde dabei jedes Prozent, um das der Nikkei-Index unter die Marke sinkt, einen Verlust von rund 100 Millionen Dollar bedeuten!

Ende 1994 stand der Nikkei-Index bei 20000 Punkten. Die für Leeson kritische Marke lag bei 18000 Punkten. Mitte Februar 1995 durchbrach der Index diese Marke und sank bis Ende Februar auf unter 17000 Punkte. Leeson hatte die Wette verloren, und Barings ging Bankrott.

Leesons Motiv für sein risikoreiches Handeln war das Streben nach Anerkennung. Er wollte ein Star werden. Leeson stammte aus der englischen Unterschicht und hatte keine höhere Schule besucht. Er arbeitete sich bei Barings hoch. Er schamte den Sprung vom Back Office an die

Front. Zum Desaster kam es nicht, weil Leeson mit Optionen spekulierte - das war Teil seines Jobs. Zum Desaster kam es, weil es bei Barings keine Stelle gab, welche die Höhe der Einsätze der Händler kontrollierte und limitierte und weil die eingegangenen Risiken nicht durch Gegengeschäfte mindestens teilweise abgesichert wurden. « (M. Adelmeyer (2000), S. 3)

Ich hoffe, dass diese wenigen Anmerkungen Ihr Interesse an der Materie geweckt haben.

Literatur:

- M. Adelmeyer (2000): Call & Put. Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht. Orell Füssli, Zürich.
- M. Auer (2008): Operationelles Risikomanagement bei Finanzinstituten. Risiken identifizieren, analysieren und steuern. Wiley VCH, Weinheim.
- A.S. Chernobai, S.T. Rachev und F.J. Fabozzi (2007): Operational Risk. A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis. Wiley, N.Y.
- R. Doff (Ed.) (2014): The Solvency II Handbook. Practical Approaches to Implementation. RISK Books, London.
- P. Grossi und H. Kunreuther (2005): Catastrophe Modeling: A New Approach to Managing Risk. Springer, Boston.

KAPITEL 1: EXTREMWERTVERTEILUNGEN

I. EXTREMWERTVERTEILUNGEN

Motivation für die Beschäftigung mit Extremwertverteilungen:

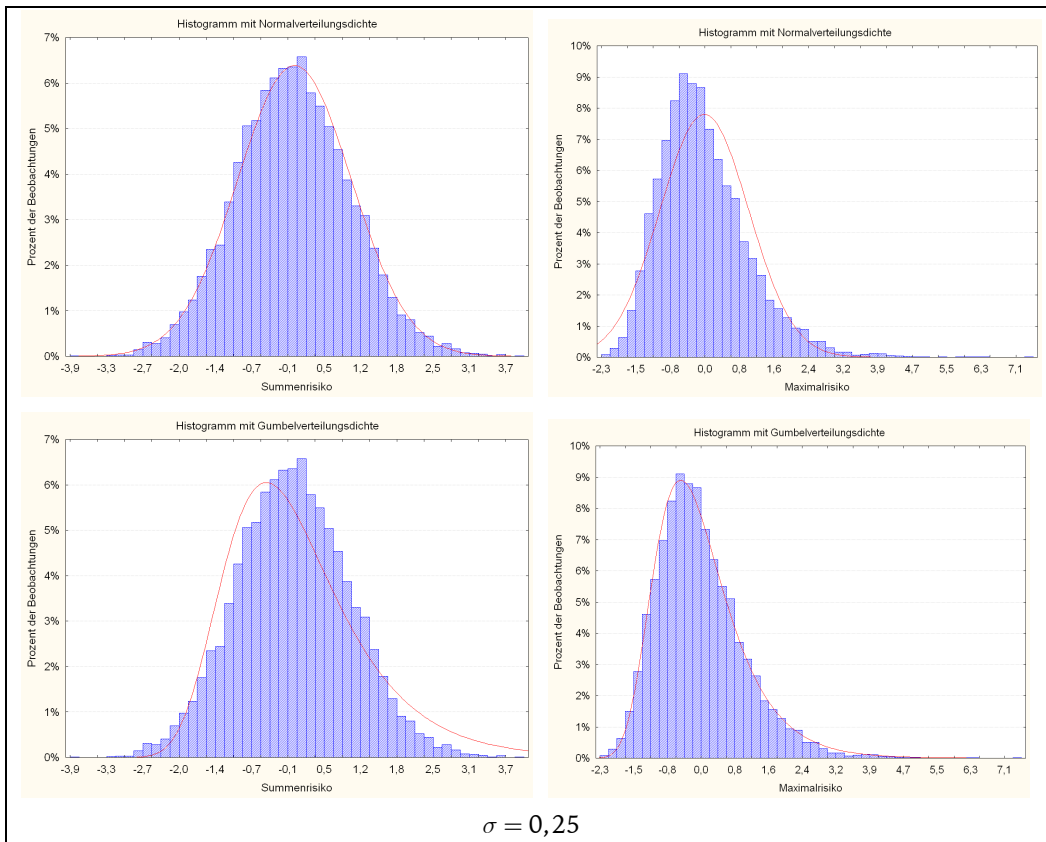
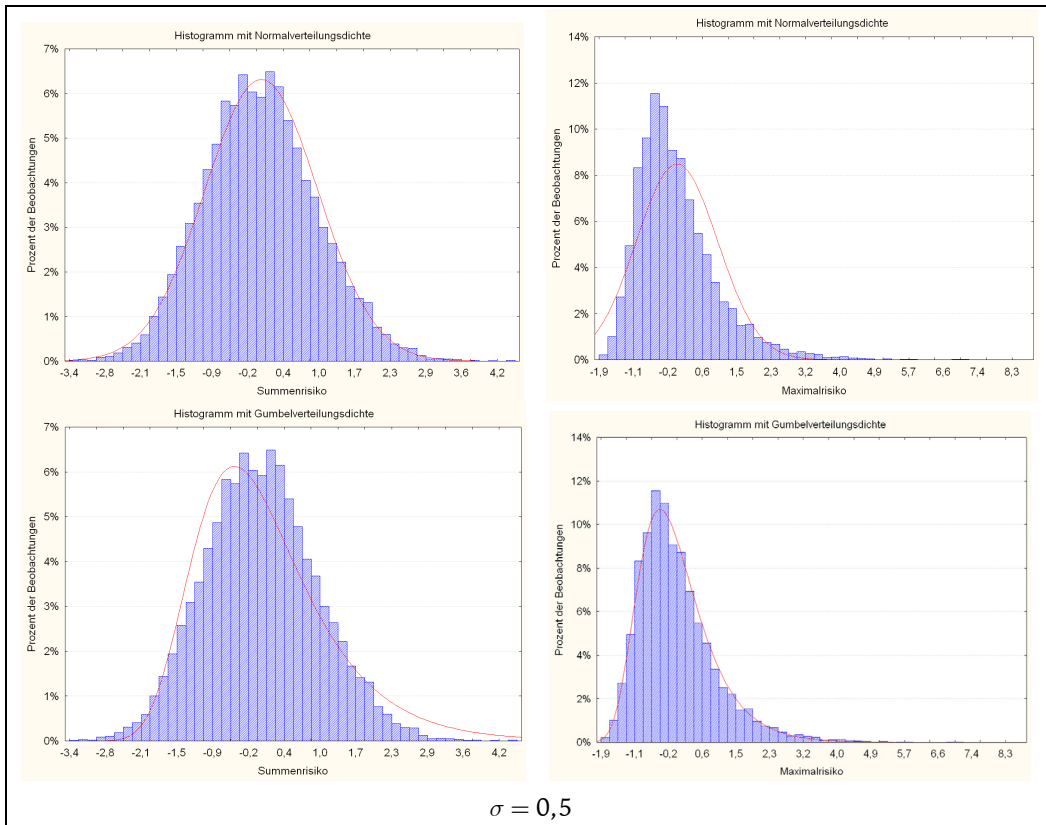
- **Substantielle Verluste** im Versicherungsbereich z.B. auf Grund von Naturereignissen (Stürme, Überschwemmungen, Erdbeben, ...)
- **Substantielle Verluste** im Bankbereich z.B. auf Grund wirtschaftlicher und politischer Krisen
- **Substantielle Verluste** in beiden Bereichen z.B. auf Grund von persönlichem Fehlverhalten (Fehleinschätzungen des Managements, Betrug, ...) oder externen Ereignissen (IT-Ausfall, Sabotage, Brand, Unglücksfälle, ...)
- Statistische Verteilungen daraus resultierender Verluste unterscheiden sich deutlich von der Verteilung „normaler“ Verluste.
- Extremwertverteilungen lassen sich mathematisch „begründen“ (ähnlich der Normalverteilung durch den Zentralen Grenzwertsatz).
- Extremwertverteilungen spielen eine zentrale Rolle z.B. bei der Bewertung Operationaler Risiken unter Basel III und Solvency II.
- Extremwertverteilungen und die damit verwandten verallgemeinerten Pareto-Verteilungen bilden die Grundlage der Modellierung von Schäden in der Rückversicherung.

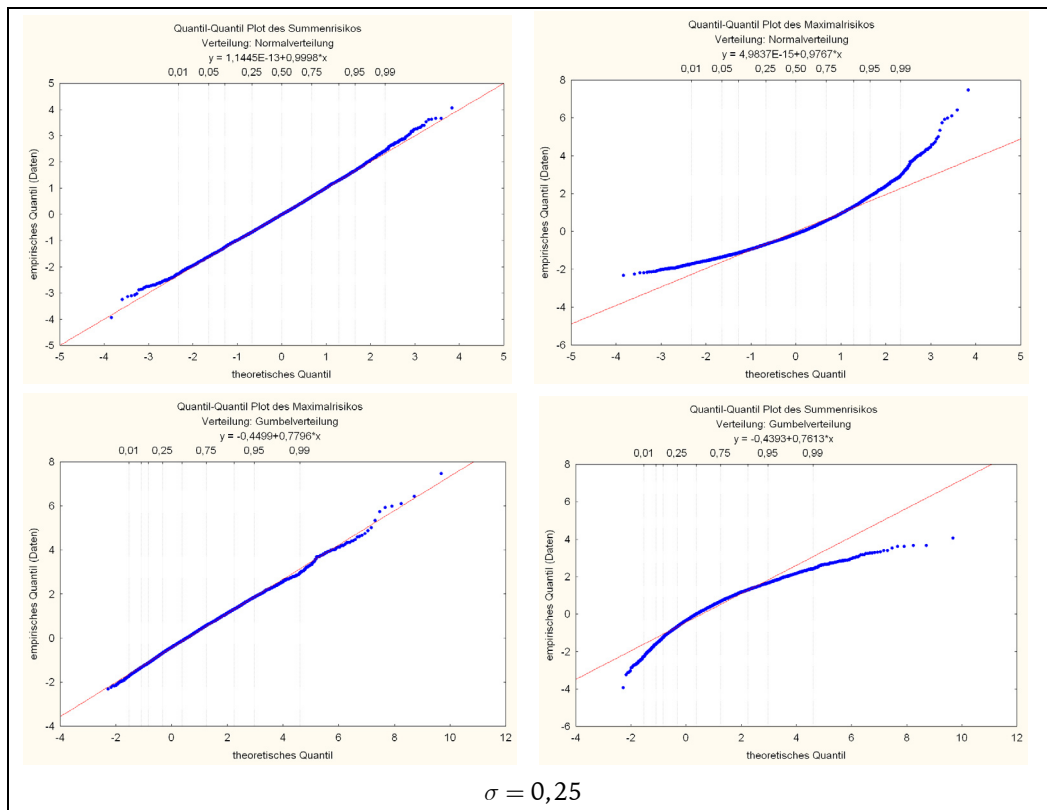
Numerische Studie zur Motivation:

10.000-fache Wiederholung eines Experiments mit jeweils 50 stochastisch unabhängigen $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$ -lognormalverteilten Risiken, d.h. zu Grunde liegen X_{ij} , $i = 1, \dots, 10.000$, $j = 1, \dots, 50$ für $\sigma > 0$. Dies impliziert für die Erwartungswerte $E(X_{ij}) = 1$ und für die Varianzen $Var(X_{ij}) = \exp(\sigma^2) - 1$.

Wir betrachten die Risiken $S_i := \sum_{j=1}^{50} X_{ij}$ und $M_i := \max_{1 \leq j \leq 50} \{X_{ij}\}$ sowie ihre empirischen Standardisierungen S_i^* und M_i^* , so dass $E(S_i^*) = E(M_i^*) = 0$ und $Var(S_i^*) = Var(M_i^*) = 1$ gilt. Die folgenden Graphiken zeigen für beide Standardisierungen empirische Histogramme mit verschiedenen Werten von σ .

I. EXTREMWERTVERTEILUNGEN





Diese Graphiken zeigen wegen der offensichtlichen Linearität im linken und der Nichtlinearität im rechten Bild außerdem, dass die Verteilungen des Summen- und des Maximalrisikos nicht aus derselben Lage-Skalen-Familie stammen können.

Überlegungen zur Herleitung von Extremwertverteilungen:

Sind X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige Zufallsvariablen (Risiken) und bezeichnet $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$P(X_{n:n} \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x\}\right) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei F die Verteilungsfunktion der X_k bezeichne. Mit noch geeignet zu bestimmenden Konstantenfolgen $\{a_n\}$ (mit $a_n > 0$) und $\{b_n\}$ kann man nun versuchen, ähnlich zum Zentralen Grenzwertsatz einen Grenzwert für die normalisierten Maxima $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ zu finden. Wir zeigen hier exemplarisch am Beispiel der Exponentialverteilung $\mathcal{E}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$, dass dies in gewissen Fällen funktioniert.

Wir wählen $a_n = \frac{1}{\lambda}$ und $b_n = \frac{\ln n}{\lambda}$. Dann folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) &= P\left(\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(X_{n:n} \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \\ &= F^n\left(\frac{x + \ln n}{\lambda}\right) = \left(1 - \exp\left\{-\lambda \cdot \left(\frac{x + \ln n}{\lambda}\right)^+\right\}\right)^n \\ &= \left(1 - \exp\left\{-(x + \ln n)^+\right\}\right)^n = \left\{1 - \frac{e^{-x}}{n}\right\}^n \rightarrow \exp(-\exp(-x)) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Die zugehörige Grenzverteilung heißt Gumbelverteilung oder doppelte Exponentialverteilung.

Nach einem klassischen **Satz von Fisher und Tippett** gilt allgemein, dass im Falle der Konvergenz die (nicht-degenerierten) Grenzverteilungsfunktionen bis auf positiv-lineare Transformationen (Lage-Skalen-Familien) von genau einem der drei folgenden Typen sind:

$$\text{Fréchet-Klasse: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{Weibull-Klasse: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{Gumbel-Klasse: } \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

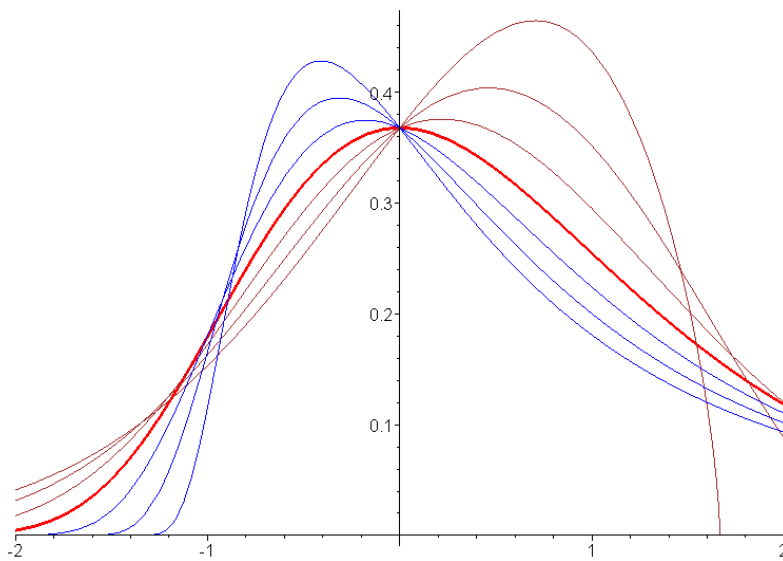
Man kann die drei Klassen von Verteilungsfunktionen auch durch eine einzige Verteilungsfunktionsklasse (mit nur einem Parameter) charakterisieren, und zwar folgendermaßen:

$$G_\xi(x) = \exp\left\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\right\}, \quad 1 + \xi x > 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

wobei der Sonderfall $\xi = 0$ als Grenzfall aufzufassen ist.

- Für $\xi > 0$ ergibt sich die *Fréchet-Klasse*,
- für $\xi < 0$ die *Weibull-Klasse* (in beiden Fällen mit $\alpha = 1/|\xi|$)
- und für $\xi = 0$ die *Gumbel-Klasse*.

Der Parameter $\xi \in \mathbb{R}$ wird hier auch als *extremaler Index* bezeichnet.



Dichten der Standard-Grenzverteilungen in ξ -Parametrisierung

Bemerkung: Es ist nicht immer gewährleistet, dass man geeignete Folgen $\{a_n\}$ (mit $a_n > 0$) und $\{b_n\}$ finden kann, so dass $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ eine (nicht-degenerierte) Grenzverteilung besitzt. Eine exakte Charakterisierung solcher Fälle ist mathematisch kompliziert und kann hier nicht genauer dargestellt werden.

Man kann aber folgendes sagen:

Bezeichnet $x_{\text{sup}} := \sup\{x \in \mathbb{R} | F(x) < 1\}$ und $\beta_n := F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ (mit der Quantilfunktion F^{-1}), so gilt:

- a) Die Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Gumbel-Klasse* genau dann, wenn eine Funktion g existiert mit der Eigenschaft

$$\lim_{t \uparrow x_{\text{sup}}} \frac{1 - F(t + xg(t))}{1 - F(t)} = e^{-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Eine mögliche Wahl von g ist $g(t) = \int_t^{x_{\text{sup}}} \frac{1 - F(u)}{1 - F(t)} du$ für $t < x_{\text{sup}}$. Als Normalisierungskonstanten können $a_n = g(\beta_n)$, $b_n = \beta_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

- b) Die Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Fréchet-Klasse* genau dann, wenn $x_{\text{sup}} = \infty$ ist und

$$\lim_{t \uparrow \infty} \frac{1 - F(t \cdot x)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha} \text{ für alle } x > 0$$

gilt. Als Normalisierungskonstanten können $a_n = \beta_n$, $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

- c) Die Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Weibull-Klasse* genau dann, wenn $x_{\text{sup}} < \infty$ ist und

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - F(x_{\text{sup}} - x \cdot h)}{1 - F(x_{\text{sup}} - h)} = x^\alpha \text{ für alle } x > 0$$

gilt. Als Normalisierungskonstanten können $a_n = x_{\text{sup}} - \beta_n$, $b_n = x_{\text{sup}}$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

Beispiele:

Für die *Exponentialverteilung* $\mathcal{E}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ haben wir schon direkt gezeigt, dass die Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ in der *Gumbel-Klasse* liegt.

Hier ist $x_{\text{sup}} = \infty$ und $\beta_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{\lambda}$, mit

$$g(t) = \int_t^\infty \frac{1 - F(u)}{1 - F(t)} du = \int_t^\infty \exp(-\lambda(u - t)) du = \int_0^\infty \exp(-\lambda v) dv = \frac{1}{\lambda} \text{ für } t < \infty.$$

Dies bestätigt den in der Herleitung gewählten Ansatz.

Die *Pareto-Verteilung* $\mathcal{Pa}(\alpha)$ mit $\alpha > 0$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^\alpha} \text{ für } x \geq 0.$$

Hier ist $x_{\text{sup}} = \infty$ und $\beta_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n^{1/\alpha} - 1$.

Es gilt $\lim_{t \uparrow \infty} \frac{1 - F(t \cdot x)}{1 - F(t)} = \lim_{t \uparrow \infty} \frac{\frac{1}{(1+tx)^\alpha}}{\frac{1}{(1+t)^\alpha}} = \lim_{t \uparrow \infty} \frac{(1+t)^\alpha}{(1+tx)^\alpha} = x^{-\alpha}$, d.h. die Grenzverteilung

von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Fréchet-Klasse*. Als Normalisierungskonstanten können $a_n = \beta_n$, $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

Bemerkung:

Mit $a_n = \beta_n$, $b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ erhält man auch direkt

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) &= P\left(\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(X_{n:n} \leq a_n x) = F^n(\beta_n x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(1 + \beta_n x)^\alpha}\right)^n \approx \left(1 - \frac{1}{(n^{1/\alpha} x)^\alpha}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^\alpha}\right)^n \rightarrow \exp(-x^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Die *stetige Gleicherteilung* $\mathcal{U}[a, b]$ mit $a < b < \infty$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ für } a \leq x \leq b.$$

Hier ist $x_{\text{sup}} = b < \infty$ und $\beta_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = a + (b-a) \cdot \frac{n-1}{n}$.

Es gilt $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - F(x_{\text{sup}} - x \cdot h)}{1 - F(x_{\text{sup}} - h)} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{x \cdot h}{h} = x$ mit $\alpha = 1$, d.h. die Grenzverteilung

von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ liegt in der *Weibull-Klasse*. Als Normalisierungskonstanten

können $a_n = b - \beta_n = \frac{b-a}{n}$, $b_n = b$ für $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

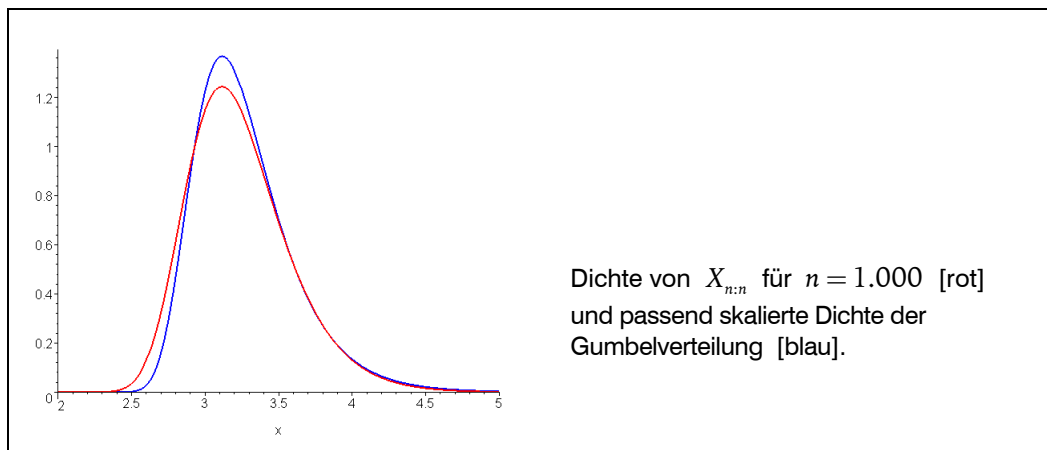
Bemerkungen:

- Ist die ursprüngliche Verteilung bereits aus der Fréchet-/ Weibull-/ Gumbel-Klasse, so auch die (dann stets existierende) Grenzverteilung von $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$. Man nennt diese Verteilungsklassen daher auch *max-stabil*.
- Für diskrete Verteilungen über Teilmengen von \mathbb{Z} existiert für *keine Wahl* normalisierender Konstanten für $Z_n = \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$ eine nicht-degenerierte Grenzverteilung.
- Das *theoretische* Quantil $\beta_n := F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ entspricht in gewisser Weise dem *empirischen* Quantil $X_{n:n}$ (\rightarrow Q-Q Plot).

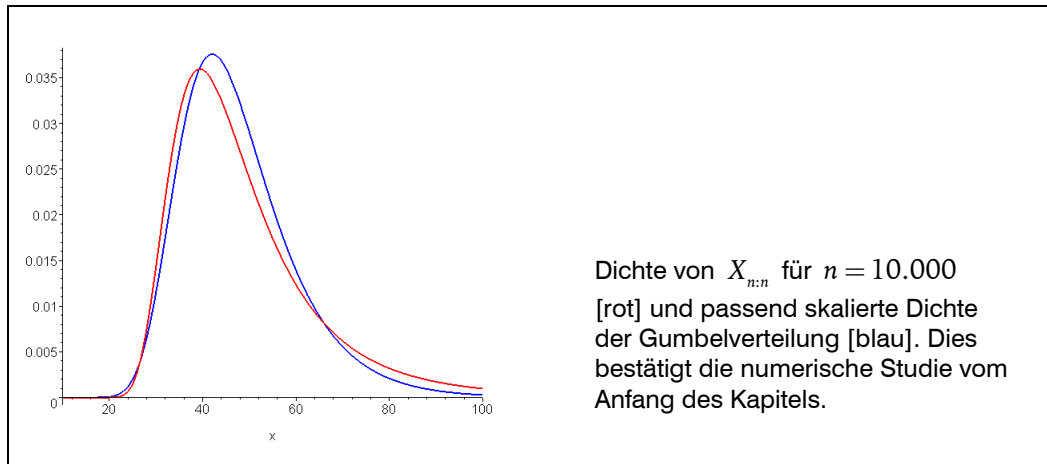
Weitere Beispiele:

Die Grenzverteilung der normalisierten Maxima von Risiken mit einer *Standard-Normalverteilung* $\mathcal{N}(0,1)$ liegt in der *Gumbel-Klasse*, mit

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2 \ln n}} \quad \text{und} \quad b_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(\ln n) + \ln(4\pi)}{\sqrt{2 \ln n}} \quad \text{für } n \geq 2.$$



Die Grenzverteilung der normalisierten Maxima von Risiken mit einer *Standard-Lognormalverteilung* $\mathcal{LN}(0,1)$ liegt ebenfalls in der *Gumbel-Klasse*, mit den Konstanten $\tilde{a}_n = a_n \cdot \exp(b_n)$ und $\tilde{b}_n = \exp(b_n)$ für $n \geq 2$ mit a_n, b_n wie zuvor.



Literatur zur Vertiefung:

- Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin. [Kapitel 3, Unterabschnitte 3.1 bis 3.3]
- Reiss, R. D. und Thomas, M. (2007): *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhäuser, Basel (3. Aufl.). [Kapitel 1, Unterabschnitte 1.1 bis 1.3]
- Beirlant, J., Goegebeur, Y., and Teugels, J. (2004): *Statistics of Extremes. Theory and Applications*. Wiley, N.Y. [Kapitel 1, Unterabschnitt 1.2.1 und Kapitel 2]