Kurzskript zur Maßtheorie

(Teil der Vorlesung Analysis III, Wintersemester 2010/11, gehalten von D. Grieser)

13. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Kurzskript enthält die wichtigsten Definitionen, Sätze und Erklärungen des Kapitels über Maßtheorie – bis zu den Konvergenzsätzen für das Integral – in der Vorlesung Analysis III, die ich im Wintersemester 2010/11 gehalten habe. Im Vergleich zur Vorlesung wurde an manchen Stellen die Reihenfolge leicht geändert, weil der Aufbau in geschriebener Form so schlüssiger ist. Die Beweise der meisten Sätze fehlen, manchmal ist eine Beweisidee angegeben.

Die eingerückten, klein gedruckten Bemerkungen geben Erklärungen, die oft über das in der Vorlesung Gesagte hinausgehen, aber für ein systematisches Verständnis des Stoffes hilfreich sein können. Sie können beim Durcharbeiten zunächst weggelassen werden.

Ich danke Katrin Tönjes, die dieses Skript großteils aus Vorlesungsaufzeichnungen geschrieben hat.

Oldenburg, den 13.1.2011
Daniel Grieser

1. Maßtheorie

Notation und Operationen mit Mengen

In der Maßtheorie ist es wichtig, mit den mengentheoretischen Operationen sehr gut vertraut zu sein. Zunächst zur Wiederholung einige Definitionen:

1.0.1 Definition

Sei X eine Menge.

a) $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$ heißt **Potenzmenge** von X.

b) Ist I eine weitere Menge und ist $E_i \subset X$ für jedes $i \in I$, so sei

$$\bigcup_{i \in I} E_i := \{x \in X \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in E_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} E_i := \{x \in X \mid \text{für alle } i \in I \text{ ist } x \in E_i\}$$

c) Sind $E, F \subset X$, so ist die Differenzmenge

$$E \setminus F := \{x \in X \mid x \in E,\ x \notin F\}$$

und das Komplemnt $E^c := X \setminus E$.

I nennt man Indexmenge. Falls $I = \mathbb{N}$, so schreiben wir auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ statt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ und analog für Durchschnitte.

Es gibt zahlreiche Beziehungen zwischen diesen Operationen, die man sich am einfachsten mit Mengendiagrammen klar macht, aber zur Übung auch formal beweisen sollte. Zum Beispiel:

$$A \setminus \bigcup_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus E_i) \text{(de Morgansche Regel)}$$

$$E \setminus F = E \cap F^c$$

usw.

Vorüberlegung

Unser Ziel ist es, das ‚Volumen' von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen. Sie denken dabei sicher zunächst daran, konkrete Volumenberechnungen durchzuführen, und das werden wir später auch tun. Leider stellt sich aber heraus, dass mit dem Begriff von ‚Volumen' grundsätzliche Probleme verbunden sind, wenn man nicht aufpasst.

Wir formulieren eine erste Version unseres Ziels. Diese wird später modifiziert.

Ziel (ehrgeizige Version). *Für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ wollen wir das Volumen $\mu(E) :=$ Volumen von E angeben. Mit anderen Worten, wir suchen eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$. Diese soll gewisse natürliche Eigenschaften haben, die wir von einem Volumenbegriff erwarten.*

Diese Eigenschaften sind:

- ▷ $\mu(\emptyset) = 0$.
- ▷ $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, falls für alle $i \neq j : E_i \cap E_j = \emptyset$ gilt. (Fügt man paarweise disjunkte Teile zusammen, so ist das Gesamtvolumen gleich der Summe der Einzelvolumina.)
- ▷ Für alle $x \in \mathbb{R}^n, E \subset \mathbb{R}^n$ soll $\mu(x + E) = \mu(E)$ gelten, wobei $x + E := \{x + y \mid y \in E\}$. Das heißt, dass das Volumen nach einer Verschiebung der Menge um einen Vektor x gleich bleibt.
- ▷ $\mu([0, 1]^n) = 1$.

Das Problem ist nun:

1.0.2 Satz

Es gibt kein μ mit den obigen Eigenschaften.

Unser Ziel war also zu ehrgeizig.

1.1. σ-Algebren

Ein bewährter Ausweg ist, dass man die Funktion μ nur für bestimmte Teilmengen definiert. Das führt uns zum Begriff einer σ-Algebra. Dies ist für beliebige Mengen X nicht schwieriger als für den Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$. Diese Allgemeinheit wird es uns später erlauben, die Gemeinsamkeiten von Summen und Integralen zu verstehen und gleichzeitig die Grundlagen für die Wahrscheinlichkeitstheorie zu legen.

1.1.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine **σ-Algebra** auf X ist eine Familie von Teilmengen von X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, für die gilt:

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$.

c) $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

Beispiele.

Die größte σ-Algebra auf X ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

Die kleinste σ-Algebra auf X ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$.

Falls X nicht endlich ist, so ist $\mathcal{A} = \{E \subset X \mid \#E < \infty\}$ keine σ-Algebra, da die Bedingungen b) und c) nicht erfüllt sind. (#E bezeichnet die Anzahl der Elemente von E)

Bemerkung. *Bedingung c) lässt sich auch so formulieren: $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter Vereinigungen abzählbar vieler Mengen.*

Besonders wichtig ist hierbei das Wort abzählbar.

Aus der Definition einer σ-Algebra erhalten wir einige Eigenschaften, die leicht mithilfe der Regeln von de Morgan gezeigt werden können.

1.1.2 Proposition

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Seien $E, F \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

a) $E \cup F \in \mathcal{A}$.

b) $E \cap F \in \mathcal{A}$.

c) $E \backslash F \in \mathcal{A}$.

d) $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

Bis jetzt haben wir nur triviale σ-Algebren gesehen, wie findet man nun interessante? Hierbei hilft die folgende Betrachtung:

1.1.3 Lemma

Sei S eine Menge von σ-Algebren auf X, das heißt jedes Element $\mathcal{A}$ von S sei eine σ-Algebra. Dann ist $\mathcal{A}_0 := \bigcap_{\mathcal{A} \in S} \mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

Dieses Lemma führt uns zur Definition des Erzeugers einer σ-Algebra.

1.1.4 Definition

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{E} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

Bemerkung. *$\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält. Das heißt: Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Algebra auf X mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. Dies folgt unmittelbar aus der Definition.*

Eines der wichtigsten Beispiele eines Erzeugers ist das Folgende:

Beispiel. *Sei $\mathcal{E}_{off} := \{E \subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in E \exists r > 0 : K_r(x) \subset E\}$, das heißt $\mathcal{E}_{off}$ ist die Menge aller offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.*

1.1.5 Definition

Für den Erzeuger $\mathcal{E}_{\text{off}}$ aus dem vorangegangenen Beispiel heißt $\sigma(\mathcal{E}_{\text{off}})$ die **Borel-σ-Algebra** auf $\mathbb{R}^n$. Diese wird mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißen **Borel-Mengen** .

Beispiel (Borelmengen). *Die folgenden Mengen sind Borelmengen:*

a) *Offene Mengen.*

b) *Abgeschlossene Mengen. Denn E ist abgeschlossen genau dann, wenn E^c offen ist.*

c) *Einpunktige Mengen, denn diese sind abgeschlossen.*

d) *Abzählbare Mengen, z.B. $\mathbb{Q}$ (da abzählbare Vereinigung von einpunktigen Mengen).*

e) *Für $n = 1$: Halboffene, offene, abgeschlossene Intervalle.*

1.1.6 Definition

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann sei $x + E := \{x + y \,|\, y \in E\}$.

1.1.7 Satz

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist translationsinvariant, das heißt für alle $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist ebenfalls $x + E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Beweisidee. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die Menge $\mathcal{A} := \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \,|\, x + E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. Zeige:

▷ $\mathcal{E}_{\text{off}} \subset \mathcal{A}$.

▷ $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}_{\text{off}}$ enthält, folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$. Daraus folgt die Behauptung, da nach Definition von $\mathcal{A}$ die andere Inklusion offenbar gilt. □

Fundamental für alles Weitere ist folgende Definition:

1.1.8 Definition

Ein **Quader** im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

$$Q = I_1 \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n,$$

wobei $I_1, \ldots, I_n$ Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.

Beispiele.

$n = 1$: *Ein Quader ist ein Intervall.*

$n = 2$: *Ein Quader ist ein Rechteck.*

$n = 3$: *wie üblich*

Bemerkung. $I_j = \emptyset$ *bzw.* $I_j = \{x\}$ *für* $x \in \mathbb{R}$ *ist erlaubt.*

Quader sind die einfachsten Bausteine für die Volumenberechnung. Daher sind diese für uns interessant.

Es gibt weitere nützliche Charakterisierungen der Borelmengen, zum Beispiel die folgende:

1.1.9 Proposition

a) Sei $\mathcal{E}_Q := \{Q \mid Q \text{ Quader des } \mathbb{R}^n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_Q)$, das heißt die Borelmengen werden durch Quader erzeugt.

b) Dasselbe gilt für $\mathcal{E}_{\text{off},Q} := \{Q \mid Q \text{ offene Quader des } \mathbb{R}^n\}$ und für $\mathcal{E}_{\text{abg},Q}$, die Menge der abgeschlossenen Quader des $\mathbb{R}^n$. Ebenso für die Menge der halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$.

1.2. Maße und Maßräume

1.2.1 Definition

Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Ein Maß auf $\mathcal{A}$ (oder auf X) ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, für die gilt:

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) Für paarweise disjunkte Mengen $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ist $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ erfüllt. (σ-Additivität von μ)

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum.

Bemerkung. *Rechenregel für ∞: Für alle $x \in (-\infty, \infty]$ gilt $x + \infty = \infty$. Hingegen ist $\infty - \infty$ nicht definiert.*

Beispiele.

*a) Sei X beliebig, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Definiere $\mu(E) := \#E$ für $E \in \mathcal{A}$. μ heißt **Zählmaß**. Zum Beispiel $X = \mathbb{R}$, $\mu(\{\pi, e\}) = 2$, $\mu(\mathbb{N}) = \mu([0, 2]) = \infty$.*

*b) Sei X beliebig, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Sei $w : X \to [0, \infty)$. Dann heißt $\mu_w(E) = \sum_{x \in E} w(x)$ das mit w **gewichtete Maß** von $E \subset \mathcal{A}$. Zum Beispiel: Betrachte die Menge $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Für alle $x \in X$ sei $w(x) = \frac{1}{6}$. Dann ist $\mu_w(E) = \frac{\#E}{6}$ die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln mit einem fairen Würfel ein Ergebnis in E zu erzielen.*

Bevor wir uns unserem Hauptziel zuwenden, zeigen wir einige elementare Eigenschaften von Maßen:

1.2.2 Proposition

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $E, F \ldots \in \mathcal{A}$ und $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

a) Es gilt die Additivität: $E \cap F = \emptyset \Rightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

b) Es gilt die Monotonie: $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$.

c) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

d) Für jede aufsteigende Kette $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ gilt:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{i \to \infty} \mu(E_i)$$

e) Für jede absteigende Kette $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ mit $\mu(E_1) < \infty$ gilt:

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$$

1.3. Konstruktion von Maßen

1.3.1 Definition

a) Für ein Intervall $I = (a,b), I = [a,b], I = [a,b)$ oder $I = (a,b]$ mit $a \leq b$ sei $\lambda(I) = b - a$.

b) Für einen Quader $Q = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ sei $\lambda(Q) = \lambda(I_1) \cdot \lambda(I_2) \ldots \lambda(I_n)$.

Für $n = 1$ ist das also genau die Länge eines Intervalls, für $n = 2$ die Fläche eines Rechtecks.

Wir können nun unser ursprüngliches Ziel genauer formulieren:

Ziel (bescheidene Version). *Finde ein Maß λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, das auf Quadern mit dem obigen λ übereinstimmt.*

Um dieses λ zu konstruieren, brauchen wir einen Hilfsbegriff (d.h. er ist nur im Rahmen der Konstruktion des Maßes wichtig).

1.3.2 Definition

Sei X eine Menge. Ein **äußeres Maß** auf X ist eine Abbildung $\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\alpha(\emptyset) = 0$.

b) $E \subset F \Rightarrow \alpha(E) \leq \alpha(F)$.

c) Für $E_1, E_2, \ldots \subset X$ gilt: $\alpha(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(E_i)$.

Bemerkung. *Jedes Maß ist auch ein äußeres Maß. Aber für ein äußeres Maß wird weniger gefordert: Bei c) kann ‚$<$' gelten, selbst wenn die E_i paarweise disjunkt sind.*

Wozu benötigen wir diesen Begriff? Weil er wie folgt auftritt:

1.3.3 Lemma

Sei $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\alpha_0 : \mathscr{S} \to [0,\infty]$ mit $\alpha_0(\emptyset) = 0$. Setze für $E \subset X$:

$$\alpha(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_0(E_i) \,\middle|\, E_i \in \mathscr{S}\ \forall i,\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}.$$

Dann ist α ein äußeres Maß.

Beispiel. *Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathscr{S} = \{Q \,|\, Q \text{ Quader im } \mathbb{R}^n\}$ und $\alpha_0 = \lambda : \mathscr{S} \to [0,\infty]$ wie in Definition 1.3.1 definiert. Für $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig ist dann*

$$\alpha(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) \,|\, Q_i \in \mathscr{S}\ \forall i,\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\},$$

also das Infimum über alle Gesamtvolumina von Quaderansammlungen, die E überdecken. Das heißt, dass man versucht, E mit möglichst wenig „Verschnitt“ zu überdecken.

Im Allgemeinen ist α kein Maß. Z.B. im angegebenen Beispiel zeigt man leicht, dass α translationsinvariant ist, dann kann es wegen Satz 1.0.2 kein Maß sein. Um zu einem Maß zu gelangen, müssen wir die Menge der zu messenden Mengen einschränken.

1.3.4 Definition

Sei α ein äußeres Maß auf einer Menge X. Eine Menge $E \subset X$ heißt **α-messbar**, falls gilt:

$$\forall A \subset X : \alpha(A) = \alpha(A \cap E) + \alpha(A \cap E^c)$$

Die Menge der α-messbaren Mengen wird mit $\boldsymbol{\mathcal{M}_\alpha}$ bezeichnet.

1.3.5 Satz (Carathéodory)

$\mathcal{M}_\alpha$ ist eine σ-Algebra und α eingeschränkt auf $\mathcal{M}_\alpha$ ist ein Maß.

Bemerkung. *Es ist nicht leicht, eine gute Motivation für Definition 1.3.4 zu finden. Hat man einmal diese Definition, ist Satz 1.3.5 nicht besonders schwierig zu beweisen. Man erhält damit eine Antwort auf die Frage, wie man zu einem beliebigen äußeren Maß ein Maß findet, und insbesondere auf den Borel-Mengen das gesuchte Maß λ. Dies ist ein Beispiel dafür, dass die wahre kreative Leistung in der Mathematik manchmal darin besteht, eine ‚richtige‘ Definition zu finden. Ein Geniestreich von Carathéodory!*

1.4. Das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$

Es ergeben sich nun folgende Fragen im Fall $X = \mathbb{R}^n$:

a) Konstruiert man α von λ wie oben, enthält $\mathcal{M}_\alpha$ die Borelmengen?

b) Wenn ja, ist $\alpha = \lambda$ auf Quadern?

1.4.1 Definition

Sei λ auf Quadern wie in Definition 1.3.1. Das mittels λ konstruierte äußere Maß α auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ heißt **Lebeguesches äußeres Maß**, α-messbare Mengen heißen **Lebesgue-messbar**. Die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ wird mit $\boldsymbol{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ bezeichnet.
Die Einschränkung von α auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt **Lebesgue-Maß** und wird mit $\boldsymbol{\lambda}$ bezeichnet.

Also $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_\alpha$ für das Lebesguesche äußere Maß α. Dass wir hier denselben Buchstaben λ wie in Definition 1.3.1 verwenden, wird durch Satz 1.4.4 gerechtfertigt.
Zur sprachlichen Vereinheitlichung nennt man Borel-Mengen auch **Borel-messbare Mengen**.

Da die Definition der Lebesgue-messbaren Mengen etwas abstrakt ist (Definition 1.3.4), widmet sich der Rest dieses Kapitels ihren Eigenschaften.

1.4.2 Satz

Alle Borel-Mengen sind Lebesgue-messbar.

Beweisidee. Da $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine σ-Algebra ist und da die Borelmengen von den Quadern erzeugt werden, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ alle Quader enthält. Nun lässt sich jeder Quader als Durchschnitt von ‚Streifen', d.h. Mengen der Form $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, a < x_i < b\}$ für ein i (oder analog mit einem oder zwei $\leq$) schreiben, und ein Streifen ist die Differenzmenge zweier Halbräume, also von Mengen der Form $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i < c\}$ oder $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \leq c\}$. Damit folgt die Behauptung aus folgendem Lemma.

1.4.3 Lemma

Sei H ein Halbraum. Dann ist $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Das Lemma kann wiederum direkt mit Hilfe der Definition 1.3.4 bewiesen werden, indem man die Bedingung dort zunächst für Quader A nachprüft (direkte Rechnung mittels der Formel für λ) und dann für beliebiges A mittels Überdeckungen mit Quadern beweist. □

1.4.4 Satz

Sei λ auf Quadern wie in Definition 1.3.1 definiert und α das zugehörige äußere Maß. Dann gilt $\lambda(Q) = \alpha(Q)$ für jeden Quader Q.

Da per Definition $\lambda(Q) \geq \alpha(Q)$ gilt (man überdecke Q mit dem einen Quader Q), ist für den Beweis des Satzes nur $\lambda(Q) \leq \alpha(Q)$ zu zeigen, und dies folgt aus:

1.4.5 Lemma

Seien $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ Quader in $\mathbb{R}^n$ und $Q \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$. Dann ist

$$\lambda(Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i).$$

Dieses Lemma erscheint zwar ziemlich offensichtlich, ein Beweis ist aber nicht leicht zu finden. Idee: Man beweise dies zunächst für Überdeckungen von Q mit *endlich vielen* Quadern und reduziere dann mittels des Satzes von Heine-Borel auf diesen Spezialfall.

Zusammenfassung: Wir haben die Inklusionen

$$\{\text{Quader}\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

Die zunächst nur auf Quadern definierte Funktion λ kann nach $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden. Insbesondere ist λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definiert. **Wir haben also das Ziel in seiner zweiten, bescheidenen Version erreicht:** Wir können Borel-Mengen in konsistenter Weise ‚messen'. Wir haben sogar etwas mehr erreicht, da es mehr Lebesgue- als Borel-messbare Mengen gibt, siehe unten.

Eine wichtige Eigenschaft des Lebesgue-Maßes ist die folgende:

1.4.6 Satz (Translationsinvarianz)

Das Lebesgue-Maß λ ist translationsinvariant, das heißt: Ist $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so ist $x + E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda(x + E) = \lambda(E)$.

Neben den Translationen sind die Streckungen fundamentale Transformationen des $\mathbb{R}^n$.

1.4.7 Satz

Unter Streckung um den Faktor $c > 0$ wird das Volumen einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit dem Faktor c^n multipliziert.

Genauer: Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $c > 0$. Sei $cA = \{cx \mid x \in A\}$ die Streckung von A um den Faktor c. Dann gilt:

a) cA ist Lebesgue-messbar.

b) $\lambda(cA) = c^n \lambda(A)$.

Nullmengen

1.4.8 Definition

$A \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue-)Nullmenge, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

▷ $\alpha(A) = 0$. Hierbei ist α das Lebesguesche äußere Maß.

▷ Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) < \varepsilon$

Die Äquivalenz der beiden Bedingungen folgt unmittelbar aus der Definition von α.

Im Folgenden werden wir uns immer auf das Lebesgue-Maß beziehen, daher werden wir Nullmenge statt Lebesgue-Nullmenge sagen. Mit Hilfe von Definition 1.3.4 sieht man leicht:

1.4.9 Proposition

Lebesgue-Nullmengen sind Lebesgue-messbar.

Nullmengen sind also genau die Mengen vom Volumen (genauer: Lebesgue-Maß) Null. Sie sind also besonders ‚klein'. Für viele Zwecke der Integrationstheorie sind sie vernachlässigbar, wie wir sehen werden.

Die folgenden Eigenschaften folgen direkt aus den Eigenschaften eines äußeren Maßes:

1.4.10 Satz

a) Falls A eine Nullmenge ist und $B \subset A$ gilt, so ist auch B eine Nullmenge.

b) Falls $A_1, A_2, \ldots$ Nullmengen sind, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ eine Nullmenge.

Beispiel. *Abzählbare Mengen sind Nullmengen, zum Beispiel $\mathbb{Q}$.*

Es gibt aber auch überabzählbare Nullmengen, z.B. die Cantor-Menge in $\mathbb{R}$ oder die x-Achse $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung. *Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum, so nennt man $A \subset X$ μ-Nullmenge, falls es eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ und $\mu(B) = 0$ gibt. Beachte, dass eine Nullmenge nicht zu $\mathcal{A}$ zu gehören braucht. Die Definition ist so gewählt, dass Teil a) des Satzes stimmt. Z.B. gibt es Lebesgue-Nullmengen $A \subset B$, so dass B eine Borel-Menge ist, A aber nicht!*

Weiterhin sei angemerkt, dass man für andere Maße als λ auch andere Nullmengen erhält. Ist z.B. μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, so gibt es außer der leeren Menge überhaupt keine Nullmengen. Für das Dirac-Maß δ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$\delta(E) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } 0 \in E, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

sind die Nullmengen genau die Mengen, die nicht 0 enthalten.

Vergleich von Borel- und Lebesgue-messbaren Mengen

Mithilfe des Begriffs der Nullmenge ist es nun möglich, den Unterschied zwischen Borel- und Lebesgue-messbaren Mengen zu untersuchen. Zur Erinnerung:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_{\text{off}}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

Es stellt sich die Frage, wie viel „größer " $\mathcal{L}(R^n)$ ist.

1.4.11 Satz

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{B \cup N \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), N \text{ Nullmenge}\}.$$

Bemerkung. *Es gilt: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dies kann durch eine recht komplizierte Konstruktion einer Lebesgue-messbaren Menge, die nicht Borel ist, gezeigt werden. Es geht aber auch so (siehe z.B. das Buch von Elstrodt): Man kann zeigen, dass es Bijektionen $\mathcal{B}(R^n) \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{L}(R^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, aber keine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathbb{R}^n$ gibt, sondern nur eine Injektion $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Das heißt, es gibt (viel) mehr Lebesguemengen als Borelmengen.*

Bemerkung. *Der vorangegangene Satz zeigt, lax gesagt, dass sich Borel- und Lebesgue-messbare Mengen ‚bloß' um Nullmengen unterscheiden. Warum betrachten wir dann beide? Reicht es nicht, sich in allen weiteren Betrachtungen auf eine der beiden σ-Algebren $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ zu beschränken?*

Leider nein. Das werden wir im Kapitel über Integration sehen.

1.4.12 Satz

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, das heißt es gibt eine nicht Lebesgue-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Ein Beispiel so einer Menge in $\mathbb{R}$ erhält man z.B., indem man aus jeder Nebenklasse in der Quotientengruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ genau ein Element nimmt, das in $[0,1]$ liegt. Die Menge dieser ausgewählten Elemente ist dann nicht Lebesgue-messbar.

1.5. Messbare Funktionen

Nachdem wir uns mit dem Maß von Mengen beschäftigt haben, wollen wir nun Funktionen integrieren. Dies ist für einen beliebigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nicht schwieriger einzuführen als für $\mathbb{R}^n$. Jedoch ist wieder Vorsicht geboten: Ähnlich dem Problem, das auftrat, wenn man *allen* Teilmengen von X ein Maß zuordnen wollte, treten Probleme auf, wenn man versucht, *beliebige* Funktionen zu integrieren. Daher diskutieren wir zunächst den Begriff der messbaren Funktion, der analog zum Begriff der messbaren Menge ist. Die Elemente einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ von X heißen auch $\mathcal{A}$-messbare Mengen. Analog:

1.5.1 Definition

Seien X, Y Mengen, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **$\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar**, falls gilt:

$$\forall F \in \mathcal{B} : \ f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$$

Falls $Y = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}(R)$, so heißt f **$\mathcal{A}$-Borel-messbar**.

Erinnerung: $f^{-1}(F) = \{x \in X \,|\, f(x) \in F\}$.

Wenn $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{A}$ aus dem Kontext klar sind, sprechen wir einfach von messbar oder Borel-messbar.

Bemerkung. *Dieser Begriff ist vergleichbar mit der Stetigkeit in metrischen Räumen:*

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Dann ist $f : X \to Y$ genau dann stetig, falls für alle offenen Mengen $F \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(F)$ offen ist.

Wie bei der Stetigkeit brauchen wir ein paar Eigenschaften, damit wir für eine gegebene Funktion f einfach entscheiden können, ob diese messbar ist. Zunächst ein paar elementare Beispiele:

Beispiele.

a) *Jede konstante Abbildung ist messbar für beliebige $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, denn: Sei $f(x) = y_0$ für alle $x \in X$. Dann gilt für alle $F \in \mathcal{B}$:*

$$f^{-1}(F) = \begin{cases} X & \text{falls } y_0 \in F \\ \emptyset & \text{falls } y_0 \notin F. \end{cases}$$

Da $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, ist f messbar.

b) *Sei $Y = \mathbb{R}$. Die charakteristische Funktion einer Teilmenge $E \subset X$, gegeben durch*

$$\chi_E : X \to \mathbb{R}$$
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in E \\ 0 & \text{falls } x \notin E \end{cases}$$

ist genau dann $\mathcal{A}$-Borel-messbar, wenn $E \in \mathcal{A}$.

Beweis. *$\Rightarrow$: Sei χ_E Borel-messbar. Dann gilt nach Definition, dass $E = \chi_E^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{A}$.*

$\Leftarrow$: Sei $E \in \mathcal{A}$. Dann ist $\chi_E^{-1}(\{1\}) = E \in \mathcal{A}$ und $\chi_E^{-1}(\{0\}) = E^c \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Man sieht leicht, dass für beliebiges F das Urbild $\chi^{-1}(F)$ eine der Mengen $E, E^c, \emptyset, X$ ist, also in $\mathcal{A}$ liegt. □

Die folgenden Eigenschaften erlauben, die Messbarkeit sehr vieler Funktionen zu zeigen.

1.5.2 Proposition

Seien X, Y Mengen und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ σ-Algebren.

a) Falls $\mathcal{B} = \sigma(\mathscr{F})$ für ein $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ gilt, so gilt: f $\mathcal{A} - \mathcal{B}$- messbar $\Leftrightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ für alle $F \in \mathscr{F}$. Das heißt, dass die Messbarkeit nur auf einem Erzeugendensystem getestet werden muss.

b) *Komposition:* Sei Z eine weitere Menge mit zugehöriger σ-Algebra $\mathcal{C}$. Seien $f : X \to Y$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar und $g : Y \to Z$ $\mathcal{B} - \mathcal{C}$-messbar. Dann ist die Hintereinanderschaltung $g \circ f : X \to Z$ $\mathcal{A} - \mathcal{C}$-messbar.

c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ stetig $\Rightarrow f$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-messbar.

d) Für $f_1, \ldots, f_k : X \to \mathbb{R}$ und $f = (f_1, f_2, \ldots f_k) : X \to \mathbb{R}^k$ gilt: f ist $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-messbar $\Leftrightarrow$ Für alle $i = 1, \ldots, k$ ist f_i $\mathcal{A}$-Borel-messbar.

e) $f : X \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{A}$-Borel-messbar $\Leftrightarrow$ Für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt: $\{x \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$.

Bemerkung. *Die Proposition 1.5.2 e) gilt auch mit $<$, statt $\leq$.*

1.5.3 Satz

Sei X eine Menge mit zugehöriger σ-Algebra $\mathcal{A}$ und $f, g : X \to \mathbb{R}$. Falls f, g $\mathcal{A}$-Borel-messbar sind, so sind auch

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $\max\{f, g\}$
- $\min\{f, g\}$
- $|f|$
- $c \cdot f$ für $c \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{f}$, falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$,
- $f_+ := \max\{f, 0\}$
- $f_- := \min\{f, 0\}$

$\mathcal{A}$-Borel-messbar.

Beweisidee. Sei $F = (f, g)$ und $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$. Dann ist $f + g = p \circ F$. Die erste Behauptung folgt damit aus der Stetigkeit von p und Proposition 1.5.2 b),c),d). Die anderen Aussagen beweist man ähnlich. $\square$

Bemerkung. *Hierbei und später nützlich ist: Mit den oben definierten $f_\pm$ ist $f_+, f_- \geq 0$ (Schreibweise: $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$) und*

$$f = f_+ - f_-$$
$$|f| = f_+ + f_-$$

Verhalten unter Grenzwerten

Im Unterschied zur Stetigkeit verhält sich die Messbarkeit sehr gut unter punktweisen Grenzwerten:

1.5.4 Satz

Seien $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Angenommen $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in X$. Dann ist f Borel-messbar.

Bemerkung. *Dies ist fundamental. Im Beweis wird wesentlich verwendet, dass σ-Algebren unter abzählbaren Vereinigungen und Schnitten abgeschlossen sind, nicht nur unter endlichen. Dies ist einer der Hauptgründe, warum bei σ-Algebren und Maßen immer abzählbare Operationen vorkommen!*

Nun kann man sich natürlich fragen: Wozu eigentlich der Begriff der messbaren Funktion? Die messbaren Funktionen sind die kleinste Klasse von Funktionen, die die einfachen Funktionen, die in der nächsten Definition erklärt werden, enthält und unter punktweisen Limites abgeschlossen ist.

1.5.5 Definition

Eine Borel-messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **einfach**, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt. Sind $a_1, \ldots, a_N$ diese Werte und $A_i = f^{-1}(a_i)$, so folgt:

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}.$$

Diese Darstellung einer einfachen Funktion heißt **kanonische Darstellung**.

Da f Borel-messbar und $\{a_i\}$ eine Borel-Menge ist, ist A_i messbar für alle $i = 1, \ldots, N$.

Bemerkung. *Beachte: Treppenfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind einfach, aber nicht umgekehrt.*

1.6. Integration

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir wollen nun das Integral $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ einer Borel-messbaren Funktion f auf X ‚bezüglich des Maßes μ' definieren. Diese Definition ist so gemacht, dass eine charakteristische Funktion χ_E gerade das Integral $\mu(E)$ hat. Beachte, dass die ‚Fläche unter dem Graphen' von χ_E die zylindrische Menge $E \times [0,1] \subset X \times \mathbb{R}$ ist. Das Integral ist damit deren Inhalt, sofern man das Rezept Inhalt = Grundfläche mal Höhe anwendet und die Grundfläche E mittels des Maßes μ misst: $\mu(E) \cdot 1$. Mittels Linearkombinationen ist damit auch das Integral einfacher Funktionen definiert. Allgemeine Funktionen erhält man mittels Approximation durch einfache Funktionen. Dafür brauchen wir:

1.6.1 Satz

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar.

a) Dann gibt es einfache Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ mit $\varphi_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ punktweise.

b) Falls $f \geq 0$ gilt, können alle φ_n ebenfalls positiv gewählt werden, sowie in aufsteigender Folge, das heißt $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots$.

c) Falls f beschränkt ist, können die φ_n so gewählt werden, dass die Konvergenz gleichmäßig ist.

Hier und im Folgenden bedeute ‚messbar' immer $\mathcal{A}$-Borel-messbar.

Beweisidee. Beobachtung: Zerlegt man den Wertevorrat $\mathbb{R}$ von f in Intervalle der Länge ε und definiert für jedes x nun $\varphi(x)$ als die untere Grenze desjenigen Intervalls, in dem $f(x)$ liegt, so gilt $\varphi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) + \varepsilon$ für alle x, also $\sup_x |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$. Ist f beschränkt und messbar, so ist φ einfach. Also erhält man sofort c), indem man für jedes n eine Zerlegung mit $\varepsilon = 1/n$ wählt und damit φ_n definiert. a) und b) gehen ähnlich. □

Die Definition des Integrals $\int_X f d\mu$ für messbares $f : X \to \mathbb{R}$ erfolgt in drei Schritten:

a) $f \geq 0$ einfach.

b) $f \geq 0$ beliebig messbar.

c) f beliebig messbar (und integrierbar, siehe unten).

Schritt a) :

1.6.2 Definition

Sei $\varphi : X \to \mathbb{R}$ einfach, $\varphi \geq 0$ mit kanonischer Darstellung $\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$. Dann ist das Integral von φ definiert als:

$$\int_X \varphi d\mu := \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$$

Rechenregel: $0 \cdot \infty := 0$ (kann für $a_i = 0$, $\mu(A_i) = \infty$ auftreten)

In der Definition ist die Eigenschaft $\varphi \geq 0$ wichtig, da wir so nicht $\infty - \infty$ erhalten.

Schritt b): In diesem Schritt wird das Integral für positive Funktionen mithilfe des Integrals einfacher positiver Funktionen definiert.

1.6.3 Definition

Für $f : X \to \mathbb{R}$ messbar und $f \geq 0$ sei

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu \,\middle|\, 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ einfach} \right\}.$$

Meist, z.B. in den Beispielen weiter unten, ist folgende Charakterisierung von $\int_X f \mathrm{d}\mu$ handlicher:

$$(*) \qquad \int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu, \text{ wobei } 0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \to f \text{ punktweise, } \varphi_n \text{ einfach } \forall n.$$

Dass dies stimmt, folgt aus dem Satz von Beppo Levi:

1.6.4 Satz (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Beppo Levi)

Seien $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$, sowie alle f_n messbar. Angenommen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ existiert für alle $x \in X$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

Dies ist ein erster Konvergenzsatz. Weitere werden weiter unten folgen.

Bemerkung. *Warum haben wir (∗) nicht gleich als Definition genommen? Das wäre doch nach der Überlegung vor Satz 1.6.1 natürlicher gewesen. Der Grund ist, dass es einfacher ist, aus Definition 1.6.3 die Eigenschaften des Integrals, z.B. Satz 1.6.7, zu folgern, als wenn man (∗) als Definition genommen hätte.*

Schritt c): Hierbei werden wir eine beliebige messbare Funktion zerlegen in ihren positiven und negativen Teil, sodass wir auf diese die obige Definition anwenden können.

1.6.5 Definition

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. f heißt (μ-) **integrierbar** , falls $\int_X f_+ \mathrm{d}\mu < \infty$ und $\int_X f_- \mathrm{d}\mu < \infty$. In diesem Fall sei

$$\int_X \boldsymbol{f \mathrm{d}\mu} := \int_X f_+ \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \mathrm{d}\mu.$$

Die Menge der μ-integrierbaren Funktionen wird mit

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^1(X,\mu)} := \{\text{Integrierbare Funktionen } X \to \mathbb{R}\}$$

bezeichnet.

Im Fall von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhalten wir also die altbekannte Regel:
Integral von f = Fläche oberhalb der x-Achse *minus* Fläche unterhalb der x-Achse.
(Jeweils ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse gemeint.)

Bemerkung. *Integrierbarkeit wird gefordert, damit bei der Definition von $\int_X f \mathrm{d}\mu$ rechts nicht $\infty - \infty$ steht, was nicht definiert wäre. Genau genommen würde hier eine schwächere Bedingung reichen: Dass mindestens eins (nicht beide) der Integrale über $f_\pm$ endlich ist. Man fordert aber die stärkere Bedingung, damit die Summe zweier integrierbarer Funktionen wieder integrierbar ist – das wäre mit der schwächeren Bedingung nicht immer der Fall.*

Bemerkung. *Das Integral einer messbaren Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist also in folgenden Fällen definiert:*

- ▷ $f \ge 0$. *In diesem Fall kann auch $\int_X f \mathrm{d}\mu = \infty$ sein.*
- ▷ f *kann das Vorzeichen wechseln. Dann muss $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ angenommen werden, und $\int_X f \mathrm{d}\mu$ ist endlich.*

Wir wollen auch über Teilmengen von X integrieren:

1.6.6 Definition (Integration über Teilmengen)

Für eine $\mathcal{A}$-messbare Teilmenge $E \subset X$ setze

$$\int_E \boldsymbol{f}\mathbf{d}\boldsymbol{\mu} := \int_X f\chi_E \mathrm{d}\mu$$

falls die rechte Seite definiert ist.

Bemerkung. *Jede Teilmenge $E \in \mathcal{A}$ kann als eigenständiger Maßraum $(E, \mathcal{A}_E, \mu_E)$ aufgefasst werden, und dann ist $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f_{|E} \mathrm{d}\mu_E$, wobei die rechte Seite das Integral über den Maßraum E bzgl. des Maßes μ_E ist.*

Genauer: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathcal{A}$. Setze $\mathcal{A}_E := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset E\}$ und $\mu_E := \mu|_{\mathcal{A}_E}$. Dann ist $(E, \mathcal{A}_E, \mu_E)$ ein Maßraum. Man hat eine Bijektion

$$\{\textit{Funktionen } E \to \mathbb{R}\} \leftrightarrow \{\textit{Funktionen } X \to \mathbb{R}, \textit{ die auf } X \setminus E \textit{ verschwinden}\}$$

(Gegeben $g : E \to \mathbb{R}$, setze g durch Null fort[i]*, um eine Funktion in der rechten Menge zu erhalten. Umgekehrt erhält man aus f in der rechten Menge durch Einschränkung die Funktion $f_{|E}$ in der Menge links, und diese beiden Operationen sind invers zueinander.)*

Unter dieser Bijektion entsprechen μ_E-Borel messbare Funktionen links genau μ-Borel-messbaren Funktionen rechts, und es gilt $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f_{|E} \mathrm{d}\mu_E$.

Die folgenden Regeln sind, ähnlich wie schon beim Regel- oder Riemannintegral, fundamental:

1.6.7 Satz

Seien $f, g \geq 0, \alpha \in [0, \infty)$ oder f, g integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $E \in \mathcal{A}$. Dann gilt

a) *Additivität:* $\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu + \int_E g\mathrm{d}\mu$ und $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu) \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$

b) *Homogenität:* $\int_E \alpha f \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\mathrm{d}\mu$. und $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu) \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$

c) *Monotonie:* $f \leq g$ auf $E \Rightarrow \int_E f\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\mathrm{d}\mu$.

Dies lässt sich – im Fall integrierbarer Funktionen und $E = X$ – auch so formulieren:

1.6.8 Satz

$\mathcal{L}^1(X, \mu)$ ist ein Untervektorraum von $\mathscr{F}(X, \mathbb{R}) := \{$ Funktionen $f : X \to \mathbb{R}\}$ und die Abbildung $f \mapsto \int_X f\mathrm{d}\mu$ ist linear und positiv, das heißt für $f \geq 0$ gilt $\int_X f\mathrm{d}\mu \geq 0$.

Bemerkung. *Die Monotonie impliziert die oft nützliche Ungleichung*

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_E |f|\mathrm{d}\mu$$

denn aus $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt $-\int_E |f|\mathrm{d}\mu \leq \int_E f\mathrm{d}\mu \leq \int_E |f|\mathrm{d}\mu$.

[i] d.h. setze

$$\overline{g} := \begin{cases} g(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Folgende Erweiterung des Funktionsbegriffs ist manchmal nützlich.

1.6.9 Definition (Erweiterte reelle Zahlen)

Es sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Per Definition gilt für alle $x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty$ und

$$x \cdot \infty = \begin{cases} \infty & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$$

und analog für $x \cdot (-\infty)$. Weiterhin sind die Rechenoperationen $\infty \cdot 0 = 0, \infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = -\infty, -\infty \cdot (-\infty) = \infty$ erlaubt. Hingegen ist $\infty + (-\infty)$ nicht erlaubt!

Die Definition von $\int_X f \mathrm{d}\mu$ kann dann wörtlich auf Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ erweitert werden, und die Sätze 1.6.1, 1.6.4 und 1.6.7 gelten weiterhin (in letzterem, falls $f + g$ definiert ist). Der *Vorteil* liegt in folgendem: Jede monoton wachsende Folge reeller Zahlen hat einen Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.[ii] Daher gilt auch:

Jede monoton wachsende Folge von Funktionen hat einen punktweisen Grenzwert (eine Funktion). D.h.: Für $f_1 \leq f_2 \leq \ldots : X \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert für alle $x \in X$ der Grenzwert $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

Bemerkung. *Wir müssen noch erklären, wie die Messbarkeit einer Funktion $f : \mathcal{A} :\to \overline{\mathbb{R}}$ definiert ist. Per Definition ist f Borel-messbar, wenn $f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty)$ sowie $f^{-1}(E)$ in $\mathcal{A}$ liegen, für jede Borelmenge $E \subset \mathbb{R}$.*

Äquivalent: Sei $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ die von den offenen Mengen in $\mathbb{R}$ sowie von den Mengen $\{\infty\}, \{-\infty\}$ erzeugte σ-Algebra. Dann gilt (Übung): f ist Borel-messbar genau dann, wenn f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar ist.

Für integrierbare Funktionen kann der Wert $\pm$ nur auf einer Nullmenge vorkommen:

1.6.10 Proposition

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann ist $\{x \mid |f(x)| = \infty\}$ eine Nullmenge.

Integrierbarkeitskriterien

Es ist oft nicht möglich, das Integral einer Funktion f exakt zu berechnen. Manchmal reicht es schon, zu wissen, ob f integrierbar ist. Hierfür gibt es einige Hilfsmittel:

1.6.11 Satz

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar.

a) f ist integrierbar $\Leftrightarrow \int_X |f| \mathrm{d}\mu < \infty$.

b) Falls eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $|f| \leq |g|$ existiert, so ist f ebenfalls integrierbar.

c) Sei $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \infty$. Falls f messbar und auf E beschränkt ist, dann ist f über E integrierbar.

[ii] Per Definition ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls gilt: $\forall c > 0 \exists N \forall n > N : a_n \geq c$.

Beispiele

Das Lebesgue-Integral

Es sei $X = \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \{\text{Lebesgue-messbaren Mengen}\}$ und $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß. Das Integral $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\lambda$ heißt **Lebesgue-Integral**, λ-integrierbare Funktionen heißen **Lebesgue-integrierbar**. Es ist definiert für messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$), die ≥ 0 oder integrierbar sind.

Bemerkung. *Wegen $\mathcal{A} = \{\text{Lebesgue-messbaren Mengen}\}$ bedeutet Messbarkeit von f hier genauer Lebesgue-Borel-Messbarkeit. Dieser Messbarkeitsbegriff mag etwas unnatürlich erscheinen. Naheliegende Alternativen wären, stattdessen Lebesgue-Lebesgue- oder Borel-Borel-messbare Funktionen zu betrachten. Beides hat Nachteile:*

- ▷ *Es gibt stetige Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-Lebesgue-messbar sind. Da wir zumindest alle stetigen Funktionen auf $[0,1]$ integrieren können wollen (vgl. Satz 1.6.11c), ist damit Lebesgue-Lebesgue-Messbarkeit ein ungeeigneter Begriff.*
- ▷ *Wie wir unten sehen werden, ändert sich das Integral einer Funktion nicht, wenn man ihre Werte auf einer Nullmenge ändert. Daher ist es natürlich, zu fordern: Ist f messbar, so soll auch jedes g, das sich von f nur auf einer Nullmenge unterscheidet, messbar sein. Dies ist richtig, wenn man Lebesgue-Borel-messbare Funktionen betrachtet, aber nicht für Borel-Borel-messbare Funktionen: Man nehme etwa $f = 0$ und $g = \chi_E$, wobei $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Vgl. die Bemerkung nach Satz 1.4.11.*

Allerdings hat Lebesgue-Borel-Messbarkeit auch einen Nachteil: Die Komposition zweier solcher Funktionen – etwa für $n = 1$ – ist nicht notwendig messbar.

Vergleich von Lebesgue- und Regel-Integral

Erinnerung (Regelintegral): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt regel-integrierbar $:\Leftrightarrow$ Es existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $t_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $t_n \to f$ gleichmäßig für $n \to \infty$. Für Treppenfunktionen t ist $\int_a^b t(x)\mathrm{d}x$ als Summe über Rechteckflächen definiert. Dann ist per Definition

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\mathrm{d}x.$$

In Analysis I wurde unter anderem gezeigt, dass dies wohldefiniert ist (d.h. von der Wahl der Folge (t_n) unabhängig ist) und dass jede stetige Funktion auf $[a,b]$ regel-integrierbar ist.

1.6.12 Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ regel-integrierbar. Dann ist f Lebesgue-integrierbar über $[a,b]$ und $\int_{[a,b]} f \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Beweisskizze. Treppenfunktionen sind einfach, und für diese stimmt die Gleichheit der Integrale direkt aufgrund der Definition. $t_n \to f$ gleichmäßig impliziert punktweise Konvergenz und damit Messbarkeit von f. Regelfunktionen sind beschränkt, also ist f integrierbar. Schließlich ist (mit $E = [a,b]$) $|\int_E f\mathrm{d}\lambda - \int_E t_n \mathrm{d}\lambda| \leq \int_E |f - t_n|\mathrm{d}\lambda \leq \sup_E |f - t_n|\mu(E) \to 0$ für $n \to \infty$, daraus folgt die Behauptung. □

Das heißt: Für regel-integrierbare (z.B. stetige) Funktionen bringt das Lebesgue-Integral nichts Neues. Andererseits zeigt dies auch, dass man zur Berechnung des Lebesgue-Integrals einer stetigen Funktion

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die ‚üblichen', für das Regelintegral bewiesenen Regeln anwenden kann, z.B. den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung oder die Substitutionsregel.

Beispiel. *Sei $f(x) = x$. Dann ist f stetig, also regel-integrierbar über $[1, 2]$ und es gilt:*

$$\int_{[1,2]} f \mathrm{d}\lambda = \int_1^2 x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Hierbei wurde der Hauptsatz angewendet: Integrale können mittels Stammfunktionen berechnet werden.

Bemerkung. *Die verschiedenen Integralbegriffe unterscheiden sich nur darin (für Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall in $\mathbb{R}$), wie groß die Menge der integrierbaren Funktionen ist:*

$$\{\text{Regelfunktionen}\} \subset \{\text{Rieman-int.bare Funktionen}\} \subset \{\text{Lebesgue-int.bare Funktionen}\} \subset \{\text{Alle Funktionen}\}$$

Allerdings stimmt dies nur für »eigentliche« Regelintegrale. Gewisse uneigentlich regelintegrierbare Funktionen sind nicht Lebesgue-integrierbar.

Gewichtung eines Maßes

Gegeben ein Maß μ auf X und eine messbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, $g \geq 0$, dann kann man eine neues Maß auf X definieren, das ‚mit g gewichtete Maß μ':

1.6.13 Satz

Sei $g \geq 0$ messbar. Für $E \in \mathcal{A}$ sei

$$\mu_g(E) := \int_E g \mathrm{d}\mu.$$

Dann ist μ_g ein Maß auf $\mathcal{A}$. Weiterhn gilt für messbare Funktionen f:

$f : X \to \mathbb{R}$ ist μ_g-integrierbar $\Leftrightarrow \int_X |f| g \mathrm{d}\mu < \infty$, und dann ist

$$\int_X f \mathrm{d}\mu_g = \int_X f g \mathrm{d}\mu.$$

Was bedeutet μ_g? Zum Beispiel im Fall $X \subset \mathbb{R}^3, \mu =$ Lebesgue-Maß: Interpretiert man $g(x)$ als die Dichte (Masse pro Volumen) des Körpers X an der Stelle x, so ist $\mu_g(E)$ das Gewicht der Teilmenge E des Körpers. g wird daher oft als **Dichte-Funktion** bezeichnet. Wichtige X zugeordnete Größen sind mittels μ_g zu berechnen. Z.B. hat der Schwerpunkt von X die Koordinaten $\frac{1}{\mu_g(X)} \int_X x_i \mathrm{d}\mu_g$, $i = 1, 2, 3$.

Reihen als Integrale

Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mu =$ Zählmaß, also $\mu(E) = \#E$. Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ entsprechen Folgen $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Es ist

$$\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Damit ist Summation ein Spezialfall der Integration!

Für das mit einer Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, g \geq 0$ gewichtete Zählmaß ergibt sich

$$\mu_g(E) = \sum_{n \in E} g(n)$$

$$\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu_g = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) g(n)$$

d.h. die mit g gewichtete Summe der $f(n)$.

Statt $\mathbb{N}$ kann hier natürlich eine endliche Menge stehen, dann ergeben sich endliche Summen statt Reihen.

Beispiel. *Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mu(E) = \frac{1}{6} \# E$. Sei $f(n)$ der Gewinn beim Würfeln von n. Dann ist der durchschnittliche Gewinn pro Wurf, also der Erwartungswert des Gewinns, gegeben durch:*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} f(n)$$

Die Bedeutung von Nullmengen für die Integration

Frage: An wie vielen Punkten darf man eine Funktion f ändern, ohne $\int_X f \mathrm{d}\mu$ zu verändern?

Beispiel. *Die Nullfunktion hat Integral Null.*

a) *Wir ändern den Wert an einem Punkt:*
   Für $f(x) := \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ *ist* $\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{0\}} \mathrm{d}\lambda = \lambda(\{0\}) = 0.$

b) *Wir ändern den Wert an abzählbar vielen Punkten:*
   Sei $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. *Dann gilt:* $\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$

In beiden Fällen hat sich der Wert des Integrals nicht verändert.

Antwort: Man kann die Funktion auf einer Nullmenge ändern, ohne das Integral zu ändern.

1.6.14 Satz

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $g : X \to \mathbb{R}$ derart, dass $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist. Dann ist g integrierbar und es gilt:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu$$

1.6.15 Definition

Sei $A(x)$ eine Aussage über Punkte $x \in X$, wobei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum sei. Man sagt, $A(x)$ gilt **fast überall (f.ü)** , falls die Menge $\{x \mid A(x) \text{ gilt nicht}\}$ eine Nullmenge ist.

1.6.16 Satz

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, $f \geq 0$. Falls $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$ gilt, dann ist $\{x \mid f(x) > 0\}$ eine Nullmenge, d.h. $f = 0$ fast überall.

1.7. Konvergenzsätze

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Frage: Seien $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ punktweise. Folgt dann $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f \mathrm{d}\mu$ für $n \to \infty$?

Antwort: Nein, im Allgemeinen nicht!

Beispiel. *Sei* $f_n(x) = n \cdot \chi_{(0,\frac{1}{n})}, X = \mathbb{R}, \mu = \lambda$. *Dann ist*

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Aber $f_n(x) \to 0$ *für alle* x*, also* $f_n \to f$ *mit* $f \equiv 0$. *Also*

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda = 0 \neq 1 \leftarrow \int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda.$$

Unter zusätzlichen Annahmen ist die Antwort ja. Zunächst eine Variation auf den Satz von Beppo Levi, Satz 1.6.4:

1.7.1 Satz (Satz von der monotonen, integralbeschränkten Konvergenz)

Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für jedes n messbar, sowie integrierbar. Sei $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. Angenommen es existiert ein $L \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N} : \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq L$ gilt. Dann ist der punktweise Grenzwert $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ integrierbar und

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

1.7.2 Satz (Satz von der majorisierten Konvergenz)

Seien $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, und es sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind alle f_n und f integrierbar und es gilt:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Eine wichtige Folgerung aus Satz 1.7.1 ist:

1.7.3 Satz (Integration durch Ausschöpfung)

Seien $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset X$ $\mathcal{A}$ messbar mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ über jedes A_n integrierbar. Angenommen, es existiert ein $L \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\int_{A_n} |f| \mathrm{d}\mu \leq L$ erfüllt ist. Dann ist f über X integrierbar und

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

A. Einschub aus der Analysis II: Ergänzung zur Kompaktheit

Sei (X, d) ein metrischer Raum, zum Beispiel $X = \mathbb{R}^n$ und $d(p.q) = \|p - q\|\|$. Zur Erinnerung:

a) $K_r(p) = \{q \mid dp, q) < r\}$ ist die offene Kugel um p mit Radius r.

b) $K \subset X$ heißt kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine konvergente Teilfolge in K hat, bzw. falls jede Folge einen Häufungspunkt in K hat.

Ein wirklich interessantes Phänomen in diesem Zusammenhang ist die Antwort auf die Frage: Falls $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ mit $A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, ist dann auch $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ nicht leer? Die Antwort ist so einfach, wie unfassbar. Nicht notwendigerweise! Denn: Seien $A_i := \{\frac{1}{i}, \frac{1}{i+1}, \ldots\}$. Dann ist $A_i \supset A_{i+1}$, aber $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. Um eine solche Aussage zu treffen, benötigt man weitere Anforderungen an die A_i:

A.0.4 Satz

Seien $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ nichtleere kompakte Teilmengen des metrischen Raumes X. Dann ist $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$.

Wir geben nun eine Charakterisierung der Kompaktheit, die oft benötigt wird, z.B. im Beweis von Lemma 1.4.5.

A.0.5 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Eine **offene Überdeckung** von A ist eine Familie offener Teilmengen $(U_i)_{i\in I}$ von X, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, sodass $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Eine **endliche Teilüberdeckung** von $(U_i)_{i\in I}$ besteht aus $i_1, \ldots, i_N \in I$, mit $A \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_N}$.

A.0.6 Satz (Heine-Borel)

Für $A \subset X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) A ist kompakt.

b) Jede offene Überdeckung von A hat eine endliche Teilüberdeckung.