

Mathematik-Wettbewerb

Tag der Mathematik 2016

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Ein Blatt Papier wurde zusammengefaltet, an zwei Stellen mit einer Nadel durchgestochen und wieder entfaltet, so dass vier Löcher entstanden sind. Drei der vier Löcher haben die Koordinaten $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$. Welche Koordinaten könnte das vierte Loch haben?

Aufgabe 2: (3+7=10 Punkte)

- (a) Lösen Sie die Gleichung

$$\left(\dots \left((x^2 - x) - 1 \right) - 1 \right) \dots - 1 = x^2 - 2x - 15,$$

wobei die linke Seite elf Einsen enthält.

- (b) Für jede reelle Zahl z bezeichnet $|z|$ den Betrag von z und ist durch

$$|z| = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ -z, & z < 0 \end{cases}$$

definiert. Lösen Sie die Gleichung

$$\left| \dots \left| |x^2 - x| - 1 \right| - 1 \right| \dots - 1 = x^2 - 2x - 15,$$

wobei die linke Seite elf Einsen enthält.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Auf Ihrer Party wird folgendes Spiel gespielt. Neun Ihrer Freunde sitzen an einem runden Tisch und jeder übernimmt eine der zwei möglichen Rollen: Ein Lügner (sagt nie die Wahrheit) oder ein Ehrlicher (sagt immer die Wahrheit). Für alle am Tisch ist die Rollenaufteilung genau bekannt. Auf Ihre Frage "Wer sind Ihre Nachbarn links und rechts?" antworten alle neun: "Sie sind beide Lügner". Wie viele Lügner können am Tisch sitzen?

Aufgabe 4: (5+5=10 Punkte)

Gretel verlief sich im Wald. Sie weiß aber, dass sie nicht mehr als 2 km vom Waldrand entfernt ist (der Waldrand ist gerade, so dass der Wald eine Halbebene besitzt). Schlagen Sie einen Pfad vor, der Gretel mit Sicherheit aus dem Wald führt und der höchstens

- (a) 15 km
(b) 14 km

lang ist.¹ Sie können davon ausgehen, dass Gretel Ihrem Pfad (auch mit beliebigen gekrümmten Abschnitten) immer folgen kann.

¹Für Zuhause: Finden Sie sogar einen Pfad, der höchstens 13 km lang ist?