Einführung in die Theoretische Physik

Ein Begleittext

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere, se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Galileo Galilei

Die Philosophie ist in diesem großartigen Buch geschrieben, das vor unseren Augen immer offen steht (ich meine das Universum), das man aber nicht begreifen kann, wenn man nicht zuerst lernt, die Sprache zu verstehen und die Buchstaben zu erkennen, in denen es geschrieben ist. Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und seine Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren; ohne diese Mittel ist es den Menschen unmöglich, ein einziges Wort zu verstehen; eine vergebliche Wanderung durch ein dunkles Labyrinth.

Galileo Galilei

Erste Fassung,
ausgearbeitet im Sommersemester 2015;
ergänzt im Sommersemester 2018.

Inhaltsverzeichnis

I Infinitesimalrechnung **5**
I.1 Definition und einfache Eigenschaften der Ableitung 5
I.2 Vektorfunktionen und Raumkurven 9
I.3 Die Taylorentwicklung 14
I.4 Integration 19

II Gewöhnliche Differentialgleichungen **24**
II.1 Definitionen und einfache Beispiele 24
II.2 Lösungstechniken für explizite DGLn erster Ordnung 29
II.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen 35
II.4 Symmetrische Darstellungen und exakte DGLn 36
II.5 *Einschub*: Kurvenintegrale 41
II.6 Implizite DGLn 47

III Newtonsche Mechanik **52**
III.1 Grundlegende Prinzipien der Mechanik 52
III.2 Newtonsche Mechanik eines Punktteilchens 57
III.3 Eindimensionale Bewegungen 62
III.4 Bewegung im Zentralkraftfeld 67
III.4.1 Das Kepler-Problem 71
III.4.2 Streuung 77
III.5 *Einschub*: Numerische Integration von DGLn 82
III.6 Ordnung und Chaos bei zweidimensionaler Bewegung 88

IV Vektoranalysis **98**
IV.1 grad, div und rot 99
IV.2 Flächen- und Volumenintegrale 104
IV.3 Die Integralsätze 113

V Elektro- und Magnetostatik **121**
V.1 Maxwell-Gleichungen und Einheitensysteme 122
V.2 Potentialtheorie 128
V.3 Separation der Laplace-Gleichung 140
V.4 Die Multipol-Entwicklung 154
V.5 Arbeit und Energie in der Elektrostatik 157
V.6 Das magnetische Vektorpotential 163
V.7 Die Energie des Magnetfeldes 169

VI Appendix: Die Kugelflächenfunktionen **173**
VI.1 Vollständige Separation der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten 174
VI.2 Additionstheorem und sphärische Multipolentwicklung 181

I Infinitesimalrechnung

Das „Rechnen mit unendlich kleinen Größen" gehört zu den zentralen Themen der Analysis. Die hier vorliegende Zusammenfassung kann eine systematische Einführung in dieses Gebiet keinesfalls ersetzen, sondern dient eher der Gewissenserforschung: Diese Sprache *muss* jede angehende Physikerin und jeder angehende Physiker unbedingt sicher beherrschen, um später das Buch der Natur lesen zu können!

I.1 Definition und einfache Eigenschaften der Ableitung

Unter einer „skalarwertigen" Funktion f eines reellen oder komplexen Argumentes x versteht man eine eindeutige Zuordnung

$$f : x \to f(x) \,, \tag{I.1.1}$$

wobei die Menge der zulässigen Argumente den *Definitionsbereich* von f bildet und der *Bildbereich* hier aus Skalaren, also reellen oder komplexen Zahlen bestehen soll.
Unter der *Ableitung* von f versteht man dann die Funktion

$$f' : x \to f'(x) \,, \tag{I.1.2}$$

wobei

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \,, \tag{I.1.3}$$

sofern dieser Grenzwert existiert.

■ **Beispiel:** Sei $f(x) = x^n$ für ganzzahliges n.

Mit dem binomischen Satz erhält man dafür

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} \,, \end{aligned}$$

so dass

$$(x+h)^n - x^n = \binom{n}{n-1} x^{n-1} h + \mathcal{O}(h^2) \,.$$

Dabei steht „$\mathcal{O}(h^2)$" abkürzend für alle Terme, die proportional zu h^k mit $k \geq 2$ sind, also für Terme „von zweiter oder höherer Ordnung in h". Daraus liest man die Ableitung unmittelbar ab:

$$f'(x) = n x^{n-1} \,.$$

Entscheidend ist hier, dass die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ auch nach der Division durch h im Grenzfall $h \to 0$ verschwinden. ■

Die Ableitungen vieler weiterer algebraischer und transzendenter Funktionen[1] sind aus der Analysis bekannt. Hier einige wichtige **Beispiele**:

(i) Für $f(x) = x^r$ mit $x \geq 0$ und reelles r ergibt sich $f'(x) = rx^{r-1}$.

Insbesondere erhält man daher für

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, .$$

Anders ausgedrückt: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erfüllt die *Differentialgleichung*

$$f' = \frac{1}{2f} \, .$$

(ii) Für $f(x) = \sin(x)$ ergibt sich $f'(x) = \cos(x)$; für $g(x) = \cos(x)$ gilt $g'(x) = -\sin(x)$. Daher findet man hier die Differentialgleichung $f'' = -f$. Beachte, dass diese Gleichung auch von $g(x)$ erfüllt wird!

(iii) Für $f(x) = \mathrm{e}^x$ ergibt sich $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Die Exponentialfunktion erfüllt also eine besonders einfache Differentialgleichung: $f' = f$!

Daraus folgt für reelles $a > 0$ und

$$f(x) = a^x = \mathrm{e}^{\ln a^x} = \mathrm{e}^{x \ln a}$$

sofort

$$f'(x) = \ln a \, \mathrm{e}^{x \ln a} = \ln a \, a^x \, .$$

(iv) Für $f(x) = \ln x$ ergibt sich $f'(x) = 1/x$.

In der Physik (und auch in weiteren Anwendungsbereichen der Mathematik) scheibt man gerne

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

anstelle von $f'(x)$. Diese symbolische Schreibweise wird durch den in der Definition (**I**.1.3) auftauchenden Differenzenquotienten motiviert: „df“ entspricht der „Differenz der Funktionswerte“; dx der „Differenz der Argumente“. Man beachte jedoch, dass sich die Grenzwertbildung (**I**.1.3) auf den gesamten Differenzenquotienten, also *nicht* auf Zähler und

[1] Algebraische Funktionen sind Lösung einer algebraischen Gleichung. Funktionen, die nicht algebraisch sind, werden transzendente Funktionen genannt.

Nenner einzeln bezieht. Trotzdem wird sich gerade diese suggestive Notation, die diese Tatsache zu ignorieren scheint, für praktische Rechnungen als sehr hilfreich erweisen. Häufig geht man sogar noch einen Schritt weiter und schreibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \equiv f'(x) \;, \tag{I.1.4}$$

wobei das vorangestellte Symbol $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ als „Rechenbefehl“ aufgefasst wird, also als ein *Operator*, durch den einer Funktion f ihre Ableitung f' zugeordnet wird.
Die Bildung der Ableitung ist eine *lineare* Operation; für reellwertige oder komplexwertige Funktionen f, g und reelle oder komplexe Zahlen a gelten also die Beziehungen

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{I.1.5}$$
$$(af)'(x) = af'(x) \;. \tag{I.1.6}$$

Anders ausgedrückt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist ein linearer Operator, so dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{I.1.7}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af) = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \;. \tag{I.1.8}$$

Weiterhin gelten die beiden folgenden wichtigen Rechenregeln, die in der Analysis bewiesen werden:

(i) Die *Produktregel* für differenzierbare Funktionen f, g besagt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{I.1.9}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} fg = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \;. \tag{I.1.10}$$

Beispiel: Für $f(x) = x \ln x$ erhält man auf diese Weise

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \ln x + x\frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1 \;. \end{aligned}$$

(ii) Die *Kettenregel* für die Hintereinanderausführung („Verkettung“) von Funktionen f, g lautet

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) g'(x) \;. \tag{I.1.11}$$

Das übersetzt sich in besonders suggestiver Weise in die symbolische Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \circ g = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \;. \tag{I.1.12}$$

Beispiel: Für $f(x) = \ln(\sin x)$ findet man so die Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sin x} \cos x \\ &= \cot x \ . \end{aligned}$$

Die Kettenregel (**I**.1.11) lässt sich insbesondere auch für die Berechnung der Ableitung der *Umkehrfunktion* f^{-1} einer Funktion f ausnutzen: Es gilt ja

$$x = f\big(f^{-1}(x)\big) \ ; \tag{**I**.1.13}$$

daraus folgt

$$1 = f'\big(f^{-1}(x)\big)\ {f^{-1}}'(x) \tag{**I**.1.14}$$

oder

$${f^{-1}}'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \ . \tag{**I**.1.15}$$

■ **Beispiel:** Sei $f(x) = \arcsin(x)$.

Dann gilt nach obigem Muster

$$x = \sin(\arcsin x) \ ,$$

also

$$1 = \cos(\arcsin x)\, \arcsin'(x)$$

oder

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

für $|x| < 1$. ■

Um auch diese Regel (**I**.1.15) in eine einprägsame Form im Sinne des Differentialkalküls zu bringen, betrachte man eine Funktion $y = y(x)$ mit der Umkehrfunktion $x = x(y)$. Die Beziehung (**I**.1.14) übersetzt sich dann in

$$1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \ , \tag{**I**.1.16}$$

so dass (!)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \ . \tag{**I**.1.17}$$

I.2 Vektorfunktionen und Raumkurven

Ebenso wie „skalarwertige“ kann man auch vektorwertige Funktionen (kurz: Vektorfunktionen) differenzieren. In der Mechanik beschreibt man damit *Trajektorien* $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes, also den Ort $\vec{r}$ eines Massenpunktes als Funktion der Zeit t. Die Ableitung nach der Zeit wird in der Physik gerne durch einem hochgestellten Punkt gekennzeichnet:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \dot{\vec{r}}(t) \; . \tag{**I**.2.1}$$

Dieser Ausdruck entspricht der momentanen *Geschwindigkeit* des Massenpunktes auf seiner Bahn zum Zeitpunkt t. Aus dieser Konstruktion (**I**.2.1) ist unmittelbar ersichtlich, dass die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$ zu jedem Zeitpunkt *tangential* zur Bahnkurve gerichtet sind.
Wenn die Bahn $\vec{r}(t)$ komponentenweise gegeben ist, erhält man die Geschwindigkeit durch Ableiten der einzelnen Komponenten.

■ **Beispiel:** Bewegung auf einer Schraubenlinie.

Die Raumkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_0 \cos\omega t \\ r_0 \sin\omega t \\ v_0 t \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Schraubenlinie mit r_0 als Radius; ω ist die Kreisfrequenz der Projektion der Bewegung in die x-y-Ebene. Die zugehörige Geschwindigkeit ist dann

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r_0\omega \sin\omega t \\ r_0\omega \cos\omega t \\ v_0 \end{pmatrix} \; ,$$

so dass v_0 die konstante Geschwindigkeit in Richtung der Schraubenachse angibt. ■

Natürlich ist auch die Ableitung von Vektorfunktionen eine lineare Operation:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\vec{v}(t) + \vec{w}(t)\big) &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(a\vec{v}(t)\big) &= a\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \; . \end{aligned} \tag{**I**.2.2}$$

Da es nun verschiedene Arten der Produktbildung gibt, gibt es auch verschiedene Produktregeln:

(i) Für das Skalarprodukt zweier Vektorfunktionen $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t} \; . \tag{**I**.2.3}$$

(ii) Für das vektorielle Produkt („Kreuzprodukt“) gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}\times\vec{w}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\times\vec{w}+\vec{v}\times\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}\ . \tag{I.2.4}$$

(iii) Für das Produkt einer Vektorfunktion $\vec{v}(t)$ und einer skalaren Funktion $f(t)$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\vec{v}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\vec{v}+f\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\ . \tag{I.2.5}$$

Anstelle der Zeit t kann man auch jeden anderen Parameter ξ zur Beschreibung einer Raumkurve verwenden, sofern die Zuordnung $\xi\to\vec{r}$ eindeutig ist. Besonders sinnvoll ist die *Bogenlänge* s, die die entlang der gekrümmten Bahn gemessene Länge der Kurve angibt, ausgehend von einem beliebig gewählten Anfangspunkt. Für das Inkrement

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(s+\Delta s)-\vec{r}(s) \tag{I.2.6}$$

hat man dann definitionsgemäß

$$|\Delta\vec{r}|\approx\Delta s \tag{I.2.7}$$

mit beliebiger Genauigkeit für hinreichend kleine Δs, also ist

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s}\equiv\vec{T} \tag{I.2.8}$$

ein *Tangenten-Einheitsvektor*. Kennt man zwar die Bahnkurve $\vec{r}(t)$, aber nicht die zugehörige Bogenlänge $s(t)$, so kann man s mit Hilfe der Kettenregel aus der Identität $|\vec{T}|=1$ bestimmen:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}\big(t(s)\big)}{\mathrm{d}s}\right|=1=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|\ , \tag{I.2.9}$$

also[2]

$$\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}}\,. \tag{I.2.10}$$

Das ist eine Differentialgleichung für die Funktion $s=s(t)$. Natürlich lässt sich der Tangenten-Einheitsvektor $\vec{T}(t)$ sofort auch durch Normierung bestimmen:

$$\vec{T}(t)=\frac{1}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\ . \tag{I.2.11}$$

[2]Beachte: Hier wird die Ableitung der Umkehrfunktion $s(t)$ der zunächst unbekannten Funktion $t(s)$ benötigt und dafür die Beziehung (**I**.1.17) benutzt.

■ **Beispiel:** Bogenlänge einer Schraubenlinie.

Für die Schraubenline

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 4t \end{pmatrix} \tag{I.2.12}$$

erhält man die Geschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 3\cos t \\ 4 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 16} = 5 \; .$$

Es gilt also $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right| = 5$. Wenn man fordert, dass die Bogenlänge mit der Zeit *wachsen* soll, folgt daraus $s(t) = 5t + s_0$; mit der Vereinbarung $s_0 = 0$ also schließlich

$$\vec{T}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5} \\ \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \; . \tag{I.2.13}$$

Beachte, dass dieser Tangentialvektor nicht nur normiert, sondern auch sein Argument durch die Bogenlänge ausgedrückt wurde. ■

Wenn man die Bahn $\vec{r}(s)$ entlangläuft, verändert sich die Richtung der Tangente $\vec{T}(s)$, sofern die Bahn nicht gerade ist. Die Stärke dieser Änderung ist daher ein Maß für die *Krümmung* κ der Kurve:

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right| = \sqrt{\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}} \; . \tag{I.2.14}$$

Die inverse Krümmung $1/\kappa = \varrho$ ist der (lokale) Krümmungsradius. Da nun

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s)}{\Delta s} \; , \tag{I.2.15}$$

muss der Vektor $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$ in der lokalen Kurvenebene liegen. Da weiterhin $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = 1$, folgt durch Ableiten

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{T} = 0 \; ; \tag{I.2.16}$$

daher steht $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$ *senkrecht* auf $\vec{T}$. Man bezeichnet den normierten Vektor

$$\vec{N} \equiv \frac{1}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right|} \frac{\mathrm{d}\vec{T}(s)}{\mathrm{d}s} \tag{**I**.2.17}$$

als *Hauptnormale* der Bahnkurve; dafür gilt also die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa \vec{N} \; . \tag{**I**.2.18}$$

■ **Beispiel:** Krümmung einer Kreislinie.

Für die Kreislinie

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi \\ r_0 \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

findet man

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{pmatrix} -r_0 \sin\varphi \\ r_0 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit weiter

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = r_0 \; .$$

Daher ist

$$\vec{T}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\varphi}\right| \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{r_0} \; .$$

Hier stimmt also der Krümmungsradis $1/\kappa = \varrho$ mit dem Kreisradius r_0 überein. ■

■ **Beispiel:** Hauptnormale einer Schraubenlinie.

Für die schon betrachtete Schraubenline (**I**.2.12) findet man

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5} \\ -\frac{3}{25}\sin\frac{s}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \; ;$$

also $\kappa = 3/25$ und $\varrho = 25/3 > 3$. Die Hauptnormale

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{s}{5} \\ -\sin\frac{s}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{I.2.19}$$

zeigt auf die Schraubenachse. Beachte: Der Kümmungsradius ϱ ist *größer* als der Radius der Schraubenbahn (**I**.2.12), da die Streckung der Bahn entlang der Schraubenachse die Krümmung verkleinert. ■

Schließlich definiert man die *Binormale*

$$\vec{B} \equiv \vec{T} \times \vec{N} \,, \tag{I.2.20}$$

die auf der lokalen Kurvenebene senkrecht steht. Das Tripel $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ wird als *begleitendes Dreibein* der betrachteten Kurve bezeichnet; es bildet in dieser Reihenfolge ein orientiertes Rechtssystem.
Wenn die betrachtete Raumkurve eben ist, also $\vec{N}(s)$ und $\vec{T}(s)$ stets in der gleichen Ebene liegen, ist $\vec{B}$ ein konstanter Vektor. Wenn sich dagegen $\vec{B}$ mit s verändert, ist diese Änderung ein Maß für die „Schraubung“ der Kurve in die dritte Dimension hinein. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} \\ &= \kappa\vec{N} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} \\ &= \vec{T} \times \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} \,; \end{aligned} \tag{I.2.21}$$

somit steht $\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}$ senkrecht auf $\vec{T}$. Andererseits ist $\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}$ orthogonal zu $\vec{B}$ selbst. Daher muss $\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}$ proportional zu $\vec{N}$ sein. Die Binormale knickt senkrecht zu $\vec{T}$ in Richtung der Hauptnormalen ein; der Betrag $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}\right|$ gibt an, wie stark sich die Bahnkurve aus ihrer lokalen Ebene herausschraubt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\vec{N} \,, \tag{I.2.22}$$

wobei τ als *Torsion* und τ^{-1} als (lokaler) *Windungsradius* der Bahnkurve bezeichnet wird.

■ **Beispiel:** Torsion einer Schraubenlinie.

Für die Schraubenlinie (**I**.2.12) mit dem Tangentialvektor (**I**.2.13) und der Hauptnormalen (**I**.2.19) ergibt sich die Binormale

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5} \\ \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\frac{s}{5} \\ -\sin\frac{s}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\sin\frac{s}{5} \\ -\frac{4}{5}\cos\frac{s}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \,,$$

so dass

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25}\cos\frac{s}{5} \\ \frac{4}{25}\sin\frac{s}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{25}\,\vec{N}$$

und damit $\tau = 4/25$. Man beachte, dass der Faktor „4“ aus der Wendelhöhe der Schraube stammt. ■

Schließlich ist $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$, also hat man

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} \times \vec{T} + \vec{B} \times \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \\ &= -\tau\vec{N} \times \vec{T} + \vec{B} \times \kappa\vec{N} \\ &= \tau\vec{B} - \kappa\vec{T} \quad . \end{aligned} \tag{I.2.23}$$

Die fünf in diesem Abschnitt gewonnenen Beziehungen

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \vec{T} \tag{I.2.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\vec{N} \tag{I.2.25}$$

$$\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B} \tag{I.2.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\vec{N} \tag{I.2.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = \tau\vec{B} - \kappa\vec{T} \tag{I.2.28}$$

werden als *Frenetsche Formeln* für das begleitende Dreibein bezeichnet.[3]

I.3 Die Taylorentwicklung

Für eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$ beschreibt die Gerade

$$y_{x_0}^{(1)}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \tag{I.3.1}$$

[3] *Nach Wikipedia:* Jean Frédéric Frenet (geb. am 7. Februar 1816 in Périgueux; gest. am 12. Juni 1900 ebenda) war ein französischer Mathematiker, Astronom und Meteorologe. Frenet studierte an der Universität Toulouse. Die von ihm in seiner Doktorarbeit aufgestellten und nach ihm benannten Frenetschen Formeln (sie werden auch Frenet-Serret-Formeln genannt nach Joseph Serret, der sie vollständig angab) sind grundlegend für die Beschreibung von Kurven im Raum. Bereits 1847, im Jahr seiner Promotion, erhielt er eine Professur in Toulouse. Ein Jahr darauf wechselte er an die Universität von Lyon, wo er auch Direktor der dortigen Sternwarte wurde. Dort führte er auch meteorologische Messungen durch. Im Jahre 1852 veröffentlichte er die Frenetschen Formeln im *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$. In einer geeignet kleinen Umgebung von x_0 wird die Funktion f durch diese *lineare Näherung* gut dargestellt. Ist f auch zweimal differenzierbar, erhält man offenbar eine bessere Näherung, wenn man eine *Parabel* bei x_0 an f anpasst: Die quadratische Funktion

$$y_{x_0}^{(2)}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) \tag{I.3.2}$$

besitzt die Eigenschaft, dass bei $x = x_0$ ihr Funktionswert und die ersten beiden Ableitungen mit denen von f übereinstimmen. Diese Konstruktion lässt sich fortsetzen: Sofern f bei x_0 sogar n-fach differenzierbar ist, stimmt

$$\begin{aligned} y_{x_0}^{(n)}(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k f^{(k)}(x_0) \end{aligned} \tag{I.3.3}$$

bei $x = x_0$ im Funktionswert und in den ersten n Ableitungen mit f überein; man erhält somit eine „polynomiale Approximation n-ter Ordnung“ an f. Sofern f sogar unendlich oft differenzierbar und „gutartig“ ist, gilt $y_{x_0}^{(n)}(x) \to f(x)$ mit $n \to \infty$ für alle x in einer Umgebung $|x - x_0| < R$ von x_0. Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k f^{(k)}(x_0) \tag{I.3.4}$$

die *Taylorentwicklung*[4] von f um x_0; das maximal zulässige R ist der *Konvergenzradius* dieser Entwicklung.
Die hier geforderte Gutartigkeit führt auf den Begriff der *analytischen Funktion*:

> *Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei weiter $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ heißt* analytisch *im Punkt $x_0 \in D$, wenn es eine Potenzreihe*
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$
>
> *gibt, die auf einer Umgebung von x_0 gegen $f(x)$ konvergiert. Ist f in jedem Punkt von D analytisch, so heißt f analytisch.*

[4] *Nach Wikipedia:* Brook Taylor (geb. am 18. August 1685 in Edmonton, Middlesex; gest. am 29. Dezember 1731 in Somerset House, London) war ein britischer Mathematiker und Mitglied der Royal Society. Taylor studierte in Cambridge Mathematik. Im Jahre 1708 entwickelte er eine Lösung zum Problem der Oszillation. Sein Hauptwerk *Methodus incrementorum directa et inversa* (Methode der direkten und inversen Inkrementierung) lieferte im Jahre 1715 Untersuchungen über die Methode der finiten Differenzen, über singuläre Lösungen von Differentialgleichungen und, erstmals in der Geschichte der Mathematik, über die schwingende Saite auf Basis mechanischer Prinzipien. Ferner enthielt es die ihm seit 1712 bekannte Potenzreihenentwicklung einer differenzierbaren Funktion, deren grundlegende Bedeutung für den Differentialkalkül Joseph-Louis Lagrange erst 1772 bemerkte. Als hochbegabter Künstler schrieb Taylor im Jahre 1715 auch über die Grundlagen der Perspektive und beschrieb als erster das Prinzip des Fluchtpunkts.

Eine analytische Funktion ist daher beliebig oft differenzierbar. Die Umkehrung gilt jedoch nicht! Außerdem stimmt offensichtlich die lokale Potenzreihendarstellung einer analytischen Funktion mit ihrer Taylorreihe überein, es gilt also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ .$$

Weiterhin sind Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten (sofern der Nenner keine Nullstellen hat!) und Verkettungen analytischer Funktionen wieder analytisch.

■ **Beispiel:** Die geometrische Reihe.

Für $|x| < 1$ gilt die Identität

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \ .$$

Daher ist die durch die linke Seite definierte *geometrische Reihe* genau die Taylorentwicklung von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um den Punkt $x_0 = 0$ und besitzt den Konvergenzradius $R = 1$. In der Tat: Es gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

und somit $f^{(k)}(0) = k!$ oder $a_k = 1$ für alle Koeffizienten der Taylorentwicklung. ■

■ **Beispiel:** Die Exponentialreihe.

Für $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist $f'(x) = \mathrm{e}^x$, damit auch $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ und $f^{(k)}(0) = 1$ für alle k. Aus der Analysis ist bekannt, dass die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$$

sogar für alle x konvergiert, d.h. hier ist $R = \infty$. ■

■ **Beispiel:** Sinus- und Cosinusreihe.

Für reelle x gilt einerseits

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \ ,$$

andererseits ist nach dem vorherigen Beispiel

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ . \end{aligned}$$

Daher gelten die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{6} \pm \dots \ . \end{aligned}$$

Diese führenden Terme der Sinus- und der Cosinusreihe werden derart häufig benötigt, dass man sie auswendig kennen sollte! ■

■ **Beispiel:** Die allgemeine Binomialreihe.

Sehr wichtig ist auch die Entwicklung

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k \qquad \text{für } |x| < 1$$

mit den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

für beliebige reelle Zahlen r. Man hat daher

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3) \ ;$$

häufig benutzt man nur die lineare Näherung

$$(1+x)^r \approx 1 + rx \ .$$

Auch diese Näherung gehört zum Basiswissen eines Physikers! ■

■ **Beispiel:** Eine glatte, aber nicht analytische Funktion.

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$

ist bei $x_0 = 0$ stetig und beliebig oft differenzierbar: Man findet sofort

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathrm{e}^{-1/h^2} = 0 \; ,$$

ebenso $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 0$. Damit hat man hier ein Beispiel für eine Funktion, die zwar beliebig oft differenzierbar und daher vollkommen „glatt“ ist, deren Taylorreihe bei $x_0 = 0$ aber den Konvergenzradius $R = 0$ besitzt und die daher dennoch in diesem Punkt nicht analytisch ist. ■

Schreibt man in der allgemeinen Taylorreihe (**I**.3.4) nun $x - x_0 = a$ und bezeichnet den „Entwicklungspunkt“ x_0 einfach als x, hat man innerhalb des Konvergenzbereiches der Reihe die Beziehung

$$\begin{aligned} f(x+a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} f^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k f(x) \\ &= \mathrm{e}^{a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} f(x) \; , \end{aligned} \tag{I.3.5}$$

wobei hier die Exponentialreihe des Operators $a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ eingeführt wurde:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} &\equiv \exp\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \; . \end{aligned} \tag{I.3.6}$$

In der so gewonnenen „Verschiebeformel“

$$f(x+a) = \mathrm{e}^{a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} f(x) \tag{I.3.7}$$

taucht also der Ableitungsoperator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ als „Generator“ der Verschiebung auf.
Noch eine andere Sichtweise auf die Taylorentwicklung ist bemerkenswert: Sofern die Taylorreihe einer Funktion f auf einem Gebiet D konvergiert, ist die Kenntnis von f auf D (d.h. die Kenntnis aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in D$) äquivalent dazu, die Funktion *nur* am Entwicklungspunkt x_0 „genau“ zu kennen (d.h. die Werte aller Ableitungen $f^{(k)}(x_0)$ zur Verfügung zu haben).

I.4 Integration

Aus der Analysis ist die Operation der Integration als „Umkehrung“ der Differentiation bekannt. Der wesentliche Zusammenhang wird durch den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* ausgedrückt:

> *Sei f in $[a,b]$ integrierbar und $x_0 \in [a,b]$ beliebig, aber fest. Dann heißt*
>
> $$F(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, f(x') \qquad \textit{mit } x \in [a,b]$$
>
> *eine* Stammfunktion *von f.*
>
> *(i) Sofern f in $[a,b]$ beschränkt ist, ist F dort stetig.*
>
> *(ii) Sofern f in $[a,b]$ stetig ist, ist F dort sogar differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.*

Als *bestimmtes Integral* einer Funktion f von a bis b bezeichnet man den Zahlenwert

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) &= \int_{x_0}^b \mathrm{d}x\, f(x) - \int_{x_0}^a \mathrm{d}x\, f(x) \\ &= F(b) - F(a) \\ &\equiv F(x)\Big|_a^b \,. \end{aligned} \tag{I.4.1}$$

Als *unbestimmtes Integral* einer Funktion f bezeichnet man eine Funktion F, deren Ableitung mit f übereinstimmt:

$$\int \mathrm{d}x\, f(x) = F(x)\,, \qquad \text{wenn } F'(x) = f(x)\,. \tag{I.4.2}$$

Es gibt also mehr als ein unbestimmtes Integral zu einer gegebenen Funktion f; die verschiedenen unbestimmten Integrale unterscheiden sich um eine „Integrationskonstante“. Die in der Formulierung des Hauptsatzes benutzte Stammfunktion ist ebenfalls ein unbestimmtes Integral; hier wurde die Integrationskonstante so gewählt, dass $F(x_0) = 0$. Für *jede* Stammfunktion gilt jedoch die Beziehung

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = F(x)\Big|_a^b \,, \tag{I.4.3}$$

da die Integrationskonstante bei der Differenzenbildung herausfällt.
Das Symbol „$\int_a^b \mathrm{d}x$“ lässt sich erneut als ein „Rechenbefehl“ interpretieren, d.h. als ein *Operator*, der auf die dahinterstehende Funktion f anzuwenden ist. In Worten: „Ordne der Funktion f denjenigen Zahlenwert zu, der sich bei der Integration von a bis b ergibt.“ Diese Operatorsichtweise ist auch der Grund dafür,

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \qquad \text{anstelle von} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

zu schreiben: Man möchte das Operatorsymbol nicht auseinanderreißen.
Ebenso wie die Differentiation ist auch die Integration eine lineare Operation: Für integrierbare Funktionen f, g und „Skalare“ c gilt

$$\int_a^b \mathrm{d}x \,\big(f(x)+g(x)\big) \;=\; \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) + \int_a^b \mathrm{d}x\, g(x) \tag{I.4.4}$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x \,\big(cf(x)\big) \;=\; c\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\;. \tag{I.4.5}$$

Es ist schließlich instruktiv, die Wirkungsweise des gebräuchlichen Differentialkalküls für die Integration zu durchdenken: Aus

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

wird zunächst rein formal

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}x\, f(x)\;,$$

und daraus dann durch Integration

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}F \;&=\; F(b)-F(a)\\ &=\; \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\;.\end{aligned}$$

Die große Kunst der Integration[5] besteht also darin, für einen gegebenen Integranden eine Stammfunktion zu finden. Für eine Reihe einfacher Funktionen hat man nach einiger Übung die jeweilige Stammfunktion im Kopf:

$f(x)$	$F(x)$
$x^n,\ n\neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\sinh x$	$\cosh x$

[5] Alte Mathematikerweisheit: *Differenzieren ist ein Handwerk, Integrieren eine Kunst!*

Häufig findet man die benötigte Stammfunktion in Integraltabellen, die ebenfalls zum Standard-Rüstzeug eines (theoretischen) Physikers gehören.[6] In vielen Fällen hilft bereits eine der folgenden beiden wichtigen Rechenregeln:

(i) Die Substitutionsregel

■ **Beispiel:** Berechnung der Kreisfläche.

Die Fläche eines Viertelkreises vom Radius a wird gegeben durch das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \mathrm{d}x\, \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= a \int_0^a \mathrm{d}x \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,. \end{aligned}$$

Substituiert man hier $y = \frac{x}{a}$, hat man $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}y$. Nach Umrechnung der Grenzen auf diese neue Variable hat man zunächst

$$I = a^2 \int_0^1 \mathrm{d}y\, \sqrt{1 - y^2}\,.$$

Hier bietet sich die weitere Substitution $y = \sin\alpha$ an: Mit $\mathrm{d}y = \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ erhält man dann

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha\, \cos\alpha\, \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha\, \cos^2\alpha \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha\, \big(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\big) \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\,. \end{aligned}$$

Dabei hat man im dritten Schritt entweder die Gleichheit der zugehörigen Flächen unter den Graphen von $y(\alpha) = \cos^2\alpha$ und $y(\alpha) = \sin^2\alpha$ erkannt oder eine weitere Substitution benutzt, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$: Wegen

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos(\pi/2 - \beta) \\ &= \cos(\pi/2)\cos\beta + \sin(\pi/2)\sin\beta \\ &= \qquad 0 \qquad + \sin\beta \end{aligned}$$

[6] Geradezu legendär ist die von den sowjetischen Mathematikern Israil Solomonowitsch Gradstein und Jossif Moissejewitsch Ryschik zusammengestellte *Table of Integrals, Series, and Products*, deren 2007 erschienene 7. englische Auflage ca. 1200 Seiten umfasst. Der „Gradshteyn-Ryzhik“ ist besonders wertvoll, weil in allen Ausgaben jedes Integral durch eine Quellenangabe nachgewiesen wird.

ist nämlich

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha\, \cos^2\alpha &= -\int_{\pi/2}^{0} \mathrm{d}\beta\, \sin^2\beta \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\beta\, \sin^2\beta\ ,\end{aligned}$$

und der Name der Integrationsvariablen hat keinen Einfluss auf den Wert des Integrals. ■

Die in diesem Beispiel mehrfach in intuitiver Weise benutzte Substitutionsregel ist eine unmittelbare Folge der Kettenregel: Ist nämlich $F(x)$ Stammfunktion zu $f(x)$ und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x) \tag{**I**.4.6}$$

oder

$$F(b) - F(a) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\ , \tag{**I**.4.7}$$

und kann weiter $x = x(u)$ als Funktion einer neuen Variablen u aufgefasst werden, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F\big(x(u)\big) = f\big(x(u)\big)x'(u)\ . \tag{**I**.4.8}$$

Ist weiter $x = x(u)$ *monoton* und damit umkehrbar, so können $u_a = x^{-1}(a)$ und $u_b = x^{-1}(b)$ eindeutig bestimmt werden. Dann folgt sofort

$$F(b) - F(a) = \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} \mathrm{d}u\, f\big(x(u)\big)x'(u)\ . \tag{**I**.4.9}$$

Schreibt man hier $x'(u) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$, so erkennt man, dass der „Kern“ der Substitutionsregel in der Ersetzung

$$\mathrm{d}x \to \mathrm{d}u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$$

besteht.

(ii) Partielle Integration

Das Verfahren der partiellen Integration ergibt sich, wenn man die Produktregel „rückwärts“ anwendet, also den Ausdruck für die Ableitung eines Produktes wieder integriert: Aus

$$f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x) \tag{**I**.4.10}$$

folgt

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)g'(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, f'(x)g(x)\ . \qquad (\mathbf{I}.4.11)$$

Man führt somit ein Integral in ein anderes, (hoffentlich) leichter zu lösendes über; man integriert dabei den gegebenen Ausdruck $f(x)g'(x)$ nicht „ganz“, sondern eben nur „partiell“.

■ **Beispiel:** Integration der Logarithmusfunktion

Zur Integration der Funktion $f(x) = \ln x$ schreibt man

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x\ \ln x &= \int_a^b \mathrm{d}x\, 1 \ln x \\ &= x\ln x\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, x\frac{1}{x} \\ &= \Big(x\ln x - x\Big)_a^b\ .\end{aligned}$$

Dieser Trick führt hier deswegen zum Erfolg, weil unter dem verbleibenden Integral die Logarithmusfunktion nicht mehr auftaucht. Der analoge Versuch

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ \sin^2 x = x\sin^2 x\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, 2x\sin x\cos x$$

führt zwar auf eine richtige Gleichung, ist aber zur Berechnung des Integrals auf der linken Seite nicht sinnvoll. Dagegen liefert er den Schlüssel für das Integral auf der rechten! ■

■ **Beispiel:** Die Gamma-Funktion

Für ganzzahliges n erhält man mit partieller Integration sofort

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n\mathrm{e}^{-x} &= -x^n\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{d}x\, nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \\ &= n\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\ .\end{aligned}$$

Iteriert man diesen Schritt, erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n\mathrm{e}^{-x} &= n!\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^0\mathrm{e}^{-x} \\ &= n!\Big(-\mathrm{e}^{-x}\Big)_0^\infty \\ &= n!\ .\end{aligned}$$

Das hier betrachtete Integral besitzt eine wichtige Verallgemeinerung: Ersetzt man den natürlichen Exponenten n durch eine *komplexe* Zahl $z-1$, erhält man die Gamma-Funktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\; t^{z-1}\mathrm{e}^{-t} \; .$$

Damit gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für ganzzahlige nichtnegative n; außerdem hat man die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \; .$$

Die Gamma-Funktion spielt eine große Rolle in der analytischen Zahlentheorie. ■

II Gewöhnliche Differentialgleichungen

Von großer Bedeutung nicht nur für die Theoretische Physik sind Grundkenntnisse über die Gewinnung von Lösungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen. So bilden die aus der Mechanik bekannten *Bewegungsgleichungen* der Form $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},t)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die je nach der Form des Kraftgesetzes auf *sehr* komplizierte Trajektorien führen können. Während es für einige besonders einfache Typen von Differentialgleichungen systematische Lösungsverfahren gibt, ist man in vielen anderen Fällen auf Intuition und Erfahrung angewiesen. Das sorgfältige Studium sowohl der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen als auch von besonders aussagekräftigen speziellen Beispielen lohnt sich daher unbedingt!

II.1 Definitionen und einfache Beispiele

Unter einer *Differentialgleichung* (kurz: DGL) versteht man eine Gleichung, in der unabhängige Variable, Funktionen und Ableitungen von Funktionen auftreten. Erste Beispiele für solche Gleichungen sind bereits in Abschnitt **I**.1 erwähnt worden: Die Exponentialfunktion $y = \mathrm{e}^x$ erfüllt die DGL

$$y' - y = 0 \; , \tag{**II**.1.1}$$

die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ dagegen die DGL

$$y' - \frac{1}{2y} = 0 \; , \tag{**II**.1.2}$$

und für die beiden trigonometrischen Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ gilt die DGL

$$y'' + y = 0 \; . \tag{**II**.1.3}$$

Ein weiteres Beispiel ist

$$y' + 2xy = 0 \; ; \tag{**II**.1.4}$$

hier ist x die unabhängige Variable und y die gesuchte Funktion. Eine *Lösung* dieser DGL ist eine Funktion $y = f(x)$, die sie identisch in x erfüllt, so dass

$$f'(x) + 2xf(x) = 0 \qquad \text{für alle zulässigen } x \; . \tag{**II**.1.5}$$

Man sieht sofort, dass $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ eine solche Lösung ist: Es gilt ja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x^2} + 2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \qquad \text{für } \; -\infty < x < +\infty \; . \tag{**II**.1.6}$$

Aber es gibt noch weitere Lösungen: Nämlich $y = c\,\mathrm{e}^{-x^2}$ mit einer beliebigen Konstanten c !
Die Gleichungen (**II**.1.1), (**II**.1.2) und (**II**.1.4) bilden Beispiele für *DGLn erster Ordnung*: Das sind DGLn, in denen nur erste und keine höheren Ableitungen vorkommen. Die allgemeine DGL erster Ordnung mit nur *einer* unabhängigen Variablen besitzt daher die Form

$$F(x, y, y') = 0 \; . \tag{**II**.1.7}$$

Treten in einer DGL auch höhere Ableitungen auf, etwa bis zur n-ten, spricht man von einer *DGL n-ter Ordnung*. Eine solche DGL mit einer Variablen hat daher die Gestalt

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \; . \tag{**II**.1.8}$$

Eine DGL n-ter Ordnung heißt *explizit*, wenn sie nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist,

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \; , \tag{**II**.1.9}$$

sonst implizit.
DGLn für Funktionen $y = f(x)$ einer einzigen unabhängigen Variablen x, also DGLn des Typs (**II**.1.7), (**II**.1.8) oder (**II**.1.9) heißen *gewöhnliche Differentialgleichungen*. Gibt es dagegen *mehrere* unabhängige Variable (und damit partielle Ableitungen), spricht man von *partiellen Differentialgleichungen*. So ist etwa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x + y \tag{**II**.1.10}$$

eine partielle DGL erster Ordnung für eine Funktion $u(x, y)$; eine spezielle Lösung davon ist $u(x, y) = xy$. Für die Physik besonders wichtig sind partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mit dem *Laplace-Operator*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{**II**.1.11}$$

gebildet werden. So beschreibt die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{**II**.1.12}$$

das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$, das durch eine stationäre Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ hervorgerufen wird; die Konstante ε_0 ist die Dielektrizitätskonstante des Vakuums. Solche partiellen DGLn sollen erst in einem späteren Teil der Vorlesung untersucht werden.
Ebenso wie die Lösung der einfachen DGL

$$y' = g(x) \tag{**II**.1.13}$$

eine additive Konstante enthält, hängt die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen DGL n-ter Ordnung von n Parametern ab. Diese Parameter erlauben es, aus der Schar der Lösungen diejenige zu identifizieren, die die gegebenen *Anfangsbedingungen* erfüllt.

■ **Beispiel:** Freier Fall ohne Luftwiderstand.

Wird ein zunächst über dem Erdboden festgehaltener Körper plötzlich losgelassen, bewegt er sich unter dem Einfluss der Schwerkraft senkrecht nach unten. Die dabei im Laufe der Zeit t zurückgelegte Strecke sei $s(t)$. Vernachlässigt man den Luftwiderstand, gilt für diese Weg-Zeit-Funktion die DGL

$$\ddot{s} = g \ ,$$

wobei $g \approx 9.81\mathrm{m/s}^2$ die lokale Erdbeschleunigung angibt. Einfache Integration liefert die Geschwindigkeit

$$v(t) = \dot{s}(t) = gt + c_1 \ ;$$

weitere Integration ergibt die gesuchte Weg-Zeit-Funktion

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \ .$$

Angenommen, der Körper befindet sich zur Zeit $t = 0$ auf der Höhe $s(0) = h$ und besitzt die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$, dann ist $c_1 = 0$ und $c_2 = h$. ■

■ **Beispiel:** Eindimensionale Bewegung im Gravitationsfeld.

Nach den Newtonschen Gravitationsgesetz ziehen sich zwei Körper mit den Massen M (die Erde) und m (ein Probekörper), die sich im Abstand s voneinander befinden, mit der Kraft

$$|F| = G\frac{Mm}{s^2}$$

gegenseitig an. Dabei ist $G = 6.672{\times}10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ die Gravitationskonstante. Misst man die Strecke von der „großen“ Masse M hin zur Probemasse m positiv, wie in Abbildung **II**.1 skizziert; so wird die Beschleunigung des Probekörpers beschrieben durch

$$\ddot{s} = -GM\frac{1}{s^2} \ .$$

Abbildung **II**.1: Eine kleine Probemasse m bewege sich im Gravitationsfeld einer großen Masse M auf einer Geraden; der Abstand der beiden Massen zum Zeitpunkt t sei $s(t)$.

Anfangsbedingungen seien nun $s(0) = R$ und $\dot{s}(0) = 0$; beide Massen sollen also anfangs im Abstand R relativ zueinander ruhen.
Eine einfache (aber nicht immer erfolgreiche) Methode zum Auffinden von Lösungen einer DGL besteht darin, naheliegende Funktionsansätze auszuprobieren, und zwar möglichst mit Parametern, die man noch geeignet anpassen kann. So führt der *Ansatz*

$$s(t) = at^b$$

in diesem Beispiel auf

$$\begin{aligned} \dot{s} &= ab\,t^{b-1} \\ \ddot{s} &= ab(b-1)\,t^{b-2} \;=\; -GMa^{-2}t^{-2b}\,. \end{aligned}$$

Das liefert die Bedingungen

$$b - 2 = -2b\,, \qquad \text{also} \quad b = \frac{2}{3}$$

und

$$a\,\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) = -GMa^{-2}\,, \quad \text{also} \quad a^3 = \frac{9}{2}GM$$

oder

$$a = \left(\frac{9}{2}GM\right)^{1/3}\,.$$

Der obige Ansatz liefert also tatsächlich Lösungen der Form $s(t) = at^{2/3}$. Man sieht dann sofort, dass auch alle Funktionen

$$s(t) = a(c \pm t)^{2/3}$$

mit einer beliebigen Konstanten c Lösungen der DGL sind, solange $c \pm t > 0$. Jedoch ist unter diesen Lösungen *keine*, die den geforderten Anfangsbedingungen genügt! Die Bedingung $s(0) = R$ führt nämlich auf

$$R = ac^{2/3}$$

oder

$$c \;=\; \left(\frac{R}{a}\right)^{3/2} \;=\; \frac{R^{3/2}}{(9GM/2)^{1/2}}\;;$$

damit ist

$$\dot{s}(0) \;=\; \pm\frac{2a}{3}c^{-1/3} \;=\; \pm\frac{2a}{3}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2} \;=\; \pm\frac{2}{3}\left(\frac{9GM/2}{R}\right)^{1/2} \;=\; \pm\left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2}\;.$$

Die Lösung mit $\dot{s}(0) < 0$ beschreibt nun die Bewegung eines Probekörpers, der zur Zeit $t = 0$ von der Stelle $s(0) = R$ aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $|\dot{s}(0)| = \sqrt{2GM/R}$ auf die große Masse zufällt. Die Lösung mit $\dot{s}(0) > 0$ entspricht einer Bewegung, bei der sich m mit (betragsmäßig) gleicher Anfangsgeschwindigkeit von M entfernt. Eine Bewegung, bei der die beiden Massen anfangs relativ zueinander ruhen, kann mit diesen Lösungen nicht beschrieben werden.
Die spezielle Lösung mit $c = 0$, also $s(t) = at^{2/3}$, beschreibt eine Bewegung von M weg, die wegen

$$\dot{s}(t) = \frac{2}{3}at^{-1/3}$$

nach unendlicher Zeit zur Ruhe kommt. Mit Hilfe der Beziehung

$$\left(\frac{s}{a}\right)^{1/2} = t^{1/3}$$

erhält man daraus die Relativgeschwindigkeit im Abstand s in der Form

$$\dot{s}(s) \;=\; \frac{2}{3}a\left(\frac{a}{s}\right)^{1/2} \;=\; \frac{2}{3}\,\frac{(9GM/2)^{1/2}}{s^{1/2}} \;=\; \left(\frac{2GM}{s}\right)^{1/2}\;.$$

Setzt man für M die Erdmasse ein, $M = 5.972{\times}10^{24}$ kg, und für s den mittleren Erdradius, $R_0 = 6.371 \times 10^6$ m, so erhält man die bekannte Fluchtgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\dot{s}(R_0) \;&=\; \left[\frac{2 \times 6.672 \times 5.972}{6.371}\;\frac{10^{-11} \times 10^{24}}{10^6}\;\frac{\mathrm{Nm^2kg}}{\mathrm{kg^2m}}\right]^{1/2} \\
&=\; \left[12.51 \times 10^7\;\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]^{1/2} \\
&=\; 11.18 \times 10^3\;\mathrm{m/s}\;;
\end{aligned}$$

das ist diejenige Geschwindigkeit, die ein Körper an der Erdoberfläche mindestens haben muss, um die Erdanziehungskraft überwinden zu können. ■

Dieses Beispiel zeigt, dass Differentialgleichungen einerseits ein sehr mächtiges Werkzeug darstellen, dass man aber andererseits eine systematische Lösungstheorie braucht: Wie lautet eigentlich die Lösung des ursprünglich gestellten Anfangswertproblems? *(Übungsaufgabe!)*

II.2 Lösungstechniken für explizite DGLn erster Ordnung

Sehr häufig tritt der Fall auf, dass y' in ein *Produkt* zweier nur von x bzw. nur von y abhängiger Funktionen f und g zerfällt: Dann hat man eine explizite DGL erster Ordnung vom Typ

$$\boxed{y' = f(x)g(y)} \tag{**II**.2.1}$$

Solche DGLn sind einfach lösbar. Hat man nämlich die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, erhält man eine Lösung durch Auflösen der Beziehung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y'}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, f(x') \tag{**II**.2.2}$$

nach y. Denn die Differentiation dieser Gleichung nach x liefert mit Hauptsatz und Kettenregel sofort

$$\frac{1}{g(y)} y'(x) = f(x) \tag{**II**.2.3}$$

und damit die gegebene DGL (**II**.2.1); für $y = y_0$ und $x = x_0$ ist die Gleichung (**II**.2.2) offensichtlich erfüllt.
In der Praxis geht man folgendermaßen vor: Man schreibt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \tag{**II**.2.4}$$

und *trennt die Variablen*, formt also symbolisch so um, dass x und y auf verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichens auftauchen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x\, f(x)\ . \tag{**II**.2.5}$$

Integration mit Berücksichtigung der Anfangsbedingung führt dann sofort auf die Gleichung (**II**.2.2).

■ **Beispiel:** Lösung der DGL $y' + 2xy = 0$.

Um die schon in Gleichung (**II**.1.4) als Beispiel herangezogene DGL $y' + 2xy = 0$ nun nicht durch „Hingucken“, sondern systematisch zu lösen, geht man aus von

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy$$

und erhält durch Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2x\mathrm{d}x \; .$$

Unbestimmte Integration ergibt dann

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -2 \int x \, \mathrm{d}x \; ,$$

also

$$\ln y = -x^2 + c_1$$

mit einer Integrationskonstanten c_1. Auflösen nach y liefert schließlich

$$y = \mathrm{e}^{-x^2+c_1} = c\,\mathrm{e}^{-x^2} \; ,$$

wobei $c = \mathrm{e}^{c_1}$ geschrieben wurde. Diese noch freie Konstante kann genutzt werden, um auch „nachträglich“ noch die Lösung an die Anfangsbedingung anzupassen. ■

Gelegentlich ist es möglich, „schwierig“ aussehende DGLn durch naheliegende Transformationen in „einfache“ zu überführen. Das gelingt z.B. bei DGLn der Form

$$\boxed{y' = f(ax + by + c)} \qquad (\mathbf{II}.2.6)$$

Hier ist natürlich nur $b \neq 0$ von Interesse. Setzt man dann

$$u(x) = ax + by(x) + c \; , \qquad (\mathbf{II}.2.7)$$

erhält man für u die neue DGL

$$\begin{aligned} u'(x) &= a + by'(x) \\ &= a + bf(u) \; , \end{aligned} \qquad (\mathbf{II}.2.8)$$

die elementar gelöst werden kann.

■ **Beispiel:** Lösung der DGL $y' = (x + y)^2$.

Zur Lösung der DGL

$$y' = (x + y)^2$$

setzt man

$$u(x) = x + y(x) \; ,$$

so dass

$$u'(x) = 1 + u^2(x) \; .$$

Trennung der Variablen ergibt dann

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \mathrm{d}x \ ,$$

also

$$\arctan u = x + c$$

oder

$$u(x) = \tan(x+c) \ .$$

Daraus erhält man schließlich gesuchte Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x) - x \\ &= \tan(x+c) - x \ . \end{aligned}$$

Es wäre nicht ganz einfach gewesen, diese Lösung zu raten! ■

In ähnlicher Weise lassen sich *homogene DGLn*, d.h. DGLn vom Typ

$$\boxed{y' = f\left(\tfrac{y}{x}\right)} \qquad (\mathbf{II}.2.9)$$

durch die Substitution

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad (x \neq 0) \qquad (\mathbf{II}.2.10)$$

in die DGL

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} \qquad (\mathbf{II}.2.11)$$

transformieren, die dann durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. *(Übungsaufgabe!)*
Eine besonders wichtige Klasse bilden die *linearen DGLn* der Form

$$\boxed{y' + g(x)y = h(x)} \qquad (\mathbf{II}.2.12)$$

wobei die Funktionen g, h stetig sein sollen. Ist $h(x) = 0$, spricht man von einer *homogenen*, andernfalls von einer *inhomogenen* linearen DGL. Mit Hilfe des Operators $\mathcal{L}$, definiert durch

$$\mathcal{L}y = y' + g(x)y \ , \qquad (\mathbf{II}.2.13)$$

der somit einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ die neue Funktion $f'(x) + g(x)f(x)$ zuordnet, schreibt man also die homogene lineare DGL in der Form

$$\mathcal{L}y = 0 \ , \qquad (\mathbf{II}.2.14)$$

und die inhomogene als

$$\mathcal{L}y = h(x) \; . \tag{**II**.2.15}$$

Dabei bedingt die Linearität der DGL die Linearität des Operators $\mathcal{L}$: Es gilt

$$\mathcal{L}(a\varphi + b\psi) = a\mathcal{L}\varphi + b\mathcal{L}\psi \tag{**II**.2.16}$$

für differenzierbare Funktionen φ, ψ und Konstanten a, b.
Die *homogene* Gleichung lässt sich nun sofort nach bekanntem Muster lösen: Aus

$$y' + g(x)y = 0 \tag{**II**.2.17}$$

und der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erhält man

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y'}{y'} = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, g(x') \tag{**II**.2.18}$$

oder

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, g(x') \; , \tag{**II**.2.19}$$

also

$$y(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, g(x')\right) \; . \tag{**II**.2.20}$$

Die *allgemeine Lösung der homogenen DGL* (**II**.2.17) besitzt daher die Form

$$y(x) = c\,\mathrm{e}^{-G(x)} \; , \tag{**II**.2.21}$$

wobei G eine Stammfunktion zu g ist, $G' = g$.
Wie aber löst man dann die *inhomogene* Gleichung (**II**.2.12) ? Die Idee dazu geht auf den italienisch-französischen Mathematiker Joseph-Louis Lagrange zurück:[1] Man macht dafür den Ansatz

$$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{-G(x)} \; , \tag{**II**.2.22}$$

[1] *Nach Wikipedia:* Joseph-Louis de Lagrange (geb. am 25. Januar 1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia; gest. am 10. April 1813 in Paris) war Mathematiker, Physiker und Astronom. Lagrange begründete die analytische Mechanik (den Lagrange-Formalismus mit der Lagrangefunktion), die er 1788 in seinem berühmten Lehrbuch *Mécanique analytique* darstellte. Weitere Arbeitsgebiete waren das Dreikörperproblem der Himmelsmechanik (Lagrange-Punkte), die Variationsrechnung und die Theorie der komplexen Funktionen. Er leistete Beiträge zur Gruppentheorie schon bevor diese als eigener Forschungszweig existierte, und zur Theorie der quadratischen Formen in der Zahlentheorie. In der Analysis trägt die Lagrangesche Darstellung des Restgliedes der Taylor-Formel und in der Theorie der Differentialgleichungen der Lagrange-Multiplikator seinen Namen.

d.h. man ersetzt die Konstante c der homogenen Lösung durch eine von der Variablen x abhängige Funktion. (Daher der Name dieses Verfahrens: *Variation der Konstanten*.) Dann gilt nämlich mit den vorherigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y &= y' + gy \\ &= (C' - Cg + gC)\mathrm{e}^{-G} \\ &= C'\mathrm{e}^{-G} \,. \end{aligned} \tag{**II**.2.23}$$

Daher ist $\mathcal{L}y = h$ genau dann, wenn

$$C' = h\mathrm{e}^{G} \,, \tag{**II**.2.24}$$

d.h. für

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, h(x')\mathrm{e}^{G(x')} + c_0 \,. \tag{**II**.2.25}$$

Damit hat man insgesamt die folgende Aussage bewiesen:

Die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ seien auf einem Intervall I stetig, und es sei $x_0 \in I$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' + g(x)y = h(x) \qquad , \qquad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung*, nämlich*

$$y(x) = \mathrm{e}^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, h(x')\mathrm{e}^{G(x')} \right) \,,$$

wobei

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, g(x) \,.$$

Diese Lösung existiert in ganz I.

Aus methodischen Gründen (nämlich weil der folgende Beweis eine wichtige Einsicht liefert) soll die *Eindeutigkeit* dieser Lösung noch einmal anders bewiesen werden: Angenommen, y und $\bar{y}$ sind zwei Lösungen der inhomogenen DGL (**II**.2.12). Dann ist

$$\mathcal{L}(y - \bar{y}) = \mathcal{L}y - \mathcal{L}\bar{y} = 0 \,, \tag{**II**.2.26}$$

d.h. die Differenz $z(x) = y(x) - \bar{y}(x)$ ist eine Lösung der homogenen DGL. Man erhält also *alle* Lösungen $y(x)$ der inhomogenen DGL in der Form

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x) \,, \tag{**II**.2.27}$$

wobei $\bar{y}(x)$ eine fest gewählte „spezielle“ Lösung der inhomogenen DGL ist und $z(x)$ alle Lösungen der homogenen DGL durchläuft. Wählt man

$$\bar{y}(x) = \mathrm{e}^{-G(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, h(x')\mathrm{e}^{G(x')} \,, \tag{**II**.2.28}$$

also eine spezielle Lösung mit $\bar{y}(x_0) = 0$, so erhält man alle Lösungen in der Form

$$y(x) = \bar{y}(x) + c\,\mathrm{e}^{-G(x)} \; . \tag{**II**.2.29}$$

Das Anfangswertpropblem mit $y(x_0) = y_0$ legt dann c eindeutig fest: Die Forderung

$$y_0 = 0 + c\,\mathrm{e}^{-G(x_0)} \tag{**II**.2.30}$$

liefert wegen $G(x_0) = 0$ sofort $c = y_0$.

■ **Beispiel:** Lösung der DGL $y' + 2y\cos x = \frac{1}{2}\cos x$.

Im Falle der inhomognenen linearen DGL

$$y' + 2y\cos x = \frac{1}{2}\cos x$$

hat man $g(x) = 2\cos x$; Stammfunktion ist z.B. $G(x) = 2\sin x$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet daher

$$z(x) = c\,\mathrm{e}^{-2\sin x} \; .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist

$$\begin{aligned}
\bar{y}(x) &= \mathrm{e}^{-2\sin x} \int_0^x \mathrm{d}x'\, \frac{1}{2}\cos x'\, \mathrm{e}^{2\sin x'} \\
&= \mathrm{e}^{-2\sin x} \left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\sin x'} \right)_0^x \\
&= \mathrm{e}^{-2\sin x} \frac{1}{4}\Big(\mathrm{e}^{2\sin x} - 1 \Big) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\sin x} \; .
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet daher schließlich

$$y(x) = c\,\mathrm{e}^{-2\sin x} + \frac{1}{4} \; .$$

Wenn man die allgemeine Lösungsformel nicht im Kopf hat, kann man einfach die Idee der „Variation der Konstanten" aufnehmen: Der Ansatz

$$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{-2\sin x}$$

führt sofort auf

$$\begin{aligned}
y' + 2y\cos x &= C'\mathrm{e}^{-2\sin x} - 2\cos x\, C\, \mathrm{e}^{-2\sin x} + 2C\, \mathrm{e}^{-2\sin x}\, \cos x \\
&= \frac{1}{2}\cos x
\end{aligned}$$

oder

$$C(x) = \int_0^x \mathrm{d}x'\, \frac{1}{2}\cos x'\, \mathrm{e}^{2\sin x'} + C_0 \; ,$$

und damit auf das gleiche Integral wie zuvor. ■

II.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

Ist eine DGL vom Typ $y' = f(x, y)$ immer lösbar? Eine Antwort auf diese Frage liefert der *Existenzsatz von Peano*, der in der Mathematik bewiesen wird:[2]

> *Ist $f(x, y)$ in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$* stetig, *so geht durch jeden Punkt (x_0, y_0)* dieses Gebietes mindestens *eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$. Jede Lösung lässt sich nach rechts und links bis zum Rand von D fortsetzen.*

Besonders wichtig ist nun die Frage, ob ein Anfangswertproblem sogar *eindeutig* lösbar ist, ob also durch jeden Punkt (x_0, y_0) *genau* eine Lösung einer DGL $y' = f(x, y)$ verläuft. Allerdings reicht die Stetigkeit der rechten Seite der DGL *nicht* aus, um diese Eindeutigkeit zu gewährleisten!

■ **Beispiel:** Nicht-Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems.

Gesucht werden nun die Lösungen der DGL

$$y' = \sqrt{|y|}\,. \tag{**II**.3.1}$$

Ist $y(x)$ eine Lösung dieser DGL, so auch $z(x) = -y(-x)$: Es gilt ja

$$z'(x) \;=\; -y'(-x)\,(-1) \;=\; y'(-x) \;=\; \sqrt{|y(-x)|} \;=\; \sqrt{|z(x)|}\,.$$

Es reicht also, zunächst nur positive Lösungen zu betrachten. Dafür gilt

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \int \mathrm{d}x\,,$$

also

$$2\sqrt{y} = x + c \qquad \text{mit } x \geq -c$$

oder

$$y = \frac{(x+c)^2}{4} \qquad \text{mit } x \geq -c\,.$$

Die Einschränkung $x \geq -c$ rührt daher, dass $y' = \sqrt{y}$ positiv sein muss. Weiterhin ist die Nullfunktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung, die auf der gesamten reellen Achse definiert ist. Schließlich erhält man negative Lösungen aus den positiven durch Übergang zu $-y(-x)$. Aus diesen Funktionen kann man beliebig viele Lösungen der DGL (**II**.3.1) zusammensetzen, die auf ganz $\mathbb{R}$ existieren, wie z.B.

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2/4 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

[2] *Nach Wikipedia:* Giuseppe Peano (geb. am 27. August 1858 in Spinetta, heute Teil von Cuneo, Piemont; gest. am 20. April 1932 in Turin) war ein italienischer Mathematiker. Er arbeitete in Turin und befasste sich mit mathematischer Logik, mit der Axiomatik der natürlichen Zahlen (Entwicklung der Peano-Axiome) und mit Differentialgleichungen erster Ordnung.

oder

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2/4 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } a \le x \le 0 \\ -(x-a)^2/4 & \text{für } x < a\ . \end{cases}$$

Damit besitzt etwa das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}$, $y(2) = 1$ *unendlich viele* Lösungen! ■

Eine derartige Vieldeutigkeit kann ausgeschlossen weden, wenn die rechte Seite der DGL $y' = f(x, y)$ einer Bedingung genügt:

> *Die Funktion $f(x, y)$ sei definiert in einem Streifen der Form $\bar{x} \le x \le \bar{x} + a$, $-\infty < y < +\infty$. Man sagt, dass f einer* Lipschitz-Bedingung *bezüglich y genügt, wenn*
>
> $$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \le L|y - \bar{y}|\ .$$
>
> *Die hier auftretende* Lipschitz-Konstante $L \ge 0$ *unterliegt dabei keiner Einschränkung.*

Damit lässt sich nun der zentrale *Existenz- und Eindeutigkeitssatz* formulieren, der in mathematischen Vorlesungen zur Theorie gewöhnlicher DGLn bewiesen wird:

> *Die Funktion $f(x, y)$ sei in einem Streifen $\bar{x} \le x \le \bar{x} + a$, $-\infty < y < +\infty$ stetig und genüge dort einer Lipschitz-Bedingung bezüglich y. Dann hat das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $\bar{x} \le x_0 \le \bar{x} + a$ genau eine Lösung, die im ganzen Intervall $\bar{x} \le x \le \bar{x} + a$ existiert.*

Merke also: Stetigkeit garantiert die Existenz, „Lipschitz-Stetigkeit“ sogar die Eindeutigkeit von Lösungen.[3] Es ist nun leicht zu sehen, dass die Funktion $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ keiner Lipschitz-Bedingung genügt, die rechte Seite der inhomogenen linearen DGL $y' = -g(x)y + h(x)$ dagegen wohl, sofern die Funktionen g und h stetig sind. *(Übungsaufgabe!)* Während daher die DGL (**II**.3.1) nicht auf eindeutig lösbare Anfangswertprobleme führt, ist die Eindeutigkeit für die lineare DGL (**II**.2.12) immer gesichert.

II.4 Symmetrische Darstellungen und exakte DGLn

Die im nun folgenden Abschnitt angestellten Überlegungen zielen weniger auf die Lösung bestimmter DGLn ab als vielmehr auf die Klärung der Voraussetzungen, die zum Begriff

[3] *Nach Wikipedia:* Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (geb. am 14. Mai 1832 in Königsberg in Preußen; gest. am 7. Oktober 1903 in Bonn) war ein deutscher Mathematiker und Hochschullehrer. Lipschitz arbeitete auf fast allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik. Insbesondere wurde er bekannt durch sein Lehrbuch der Analysis (2 Bände, Bonn 1877 und 1880). Heute noch von besonderer Bedeutung ist der von ihm entwickelte Begriff der Lipschitz-Stetigkeit. Er forschte auch auf dem Gebiet der Differentialformen und der Mechanik, insbesondere der Hamilton-Jacobischen Methode zur Lösung von Bewegungsgleichungen. Außerdem ist ein Konvergenzkriterium für Fourier-Reihen nach ihm benannt.

des *Potentials* führen. Dieses Konzept spielt sowohl in der Mechanik als auch in der Elektrodynamik eine wichtige Rolle und verdient daher eine sorgfältige Vorbereitung.

■ **Beispiel:** Die symmetrische Darstellung $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$.

Versucht man, eine Kreislinie, also die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \ ,$$

wenigstens lokal als Lösung $y(x)$ einer DGL zu beschreiben, so erhält man durch Differentiation nach x den Ausdruck

$$2x + 2yy' = 0 \ ,$$

also die recht „unsymmetrisch“ erscheinende DGL

$$y' + \frac{x}{y} = 0 \ . \qquad (\mathbf{II}.4.1)$$

Lösungen dieser DGL sind nun nicht die ursprünglichen Kreise, sondern die beiden Funktionen

$$y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \ ,$$

wobei r^2 als Integrationskonstante auftritt. An den „Nahtstellen“, d.h. bei $x = \pm r$, divergiert die Ableitung; die DGL verliert ihren Sinn. Ähnliche Schwierigkeiten werden auch in anderen Beispielen immer dann auftreten, wenn Kurven mit unendlichen Ableitungen (also „senkrechten Linienelementen“) vorkommen. Zur Vermeidung solcher unnatürlicher Komplikationen kann man eine *Parameterdarstellung* $x(t)$, $y(t)$ der betrachteten Kurve heranziehen. Für die Kreislinie hat man dann

$$x^2(t) + y^2(t) = r^2 = \text{const.} \ ,$$

und durch Differentiation nach t folgt daraus die Gleichung

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \ , \qquad (\mathbf{II}.4.2)$$

die im Vergleich zum vorherigen Versuch (**II**.4.1) deutlich symmetrischer und damit natürlicher aussieht.
Diese Gleichung (**II**.4.2) gilt für jede (als differenzierbar vorausgesetzte) Parametrisierung des Kreises. Es sind allerdings sehr verschiedene Parametrisierungen denkbar, wie z.B.

$$\begin{aligned} x(t) &= r\sin t \\ y(t) &= r\cos t \end{aligned}$$

oder etwa

$$\begin{aligned} x(t) &= r\sin t^2 \\ y(t) &= r\cos t^2 \ . \end{aligned}$$

Im ersten Fall übersetzt sich die Beziehung (**II**.4.2) in

$$r^2 \sin t \cos t + r^2 \cos t(-\sin t) = 0 \ ,$$

im zweiten in

$$r^2 \sin t^2 \cos t^2 \, 2t + r^2 \cos t^2(-\sin t^2) \, 2t = 0 \ .$$

Um nun den Kreis als ein geometrisches Objekt zu charakterisieren, ganz unabhängig davon, wie er aufgrund der gewählten speziellen Parametrisierung durchlaufen wird, schreibt man symbolisch

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 \ . \tag{**II**.4.3}$$

Dieser Ausdruck, der keinen Parameter mehr enthält, soll per Definition (!) so verstanden werden, dass für *jede* Parameterdarstellung $x(t)$, $y(t)$ die Gleichung (**II**.4.2) erfüllt wird. Die parametrisierungsunabhängige Charakterisierung des Kreises, die auf diese Weise durch die Form (**II**.4.3) erreicht wird, lässt sich unschwer geometrisch interpretieren: Sie besagt, dass in jedem Punkt des Kreises der *Tangentialvektor* $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ senkrecht auf dem Radiusvektor (x, y) steht. ■

In Verallgemeinerung dieses Beispiels versteht man unter einer *symmetrischen Darstellung* einer DGL erster Ordnung eine Gleichung der Gestalt

$$\boxed{g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y = 0} \tag{**II**.4.4}$$

Dabei wird der Ausdruck auf der linken Seite als *Differential* (genauer: als *differentielle* 1-*Form*) bezeichnet. Definitionsgemäß ist diese symbolische Gleichung gleichbedeutend damit, dass

$$g\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{x}(t) + h\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{y}(t) = 0 \tag{**II**.4.5}$$

für jede differenzierbare Parametrisierung $x(t)$, $y(t)$ der Lösungskurve, wobei $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ und $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Hier wird $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ vorausgesetzt, so dass „Punktlösungen“ $x(t) = const.$, $y(t) = const.$ ausgeschlossen werden. Diese Bedingung garantiert, dass die Kurve lokal (d.h. in einer Umgebung eines jeden Kurvenpunktes) explizit in der Form $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ mit differenzierbaren Funktionen φ, ψ dargestellt werden kann. Ist nun $x = x(t)$ und $y = y(t)$ eine Lösung der Gleichung (**II**.4.5) und ist z.B. $\dot{x}(t_0) \neq 0$, dann gilt auch $\dot{x}(t) \neq 0$ in einer Umgebung von t_0. In dieser Umgebung existiert daher eine *Umkehrfunktion* $t = t(x)$, und damit eine explizite Darstellung $y = y\big(t(x)\big)$. Für diese gilt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \ = \ \dot{y}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \ = \ \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \ = \ -\frac{g(x,y)}{h(x,y)} \ , \tag{**II**.4.6}$$

so dass

$$g(x,y) + h(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \ . \tag{**II**.4.7}$$

Ebenso führt $\dot{y}(t_0) \neq 0$ auf eine lokale Darstellung $x = x\big(t(y)\big)$; für diese gilt

$$g(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + h(x,y) = 0\ . \tag{**II**.4.8}$$

Das ist genau der Inhalt des aus der Analysis bekannten Satzes über implizite Funktionen.

Von ganz besonderer Bedeutung sind so genannte *exakte* DGLn:

Die (symmetrische Darstellung einer) DGL

$$g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

heißt exakt, *wenn eine stetig differenzierbare Funktion $F(x,y)$ existiert mit der Eigenschaft, dass*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = g(x,y) \qquad , \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = h(x,y)\ .$$

Diese Funktion $F(x,y)$ wird Stammfunktion *genannt.*

Weiterhin ist das *totale Differential dF* einer Funktion $F(x,y)$ definiert als

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y\ , \tag{**II**.4.9}$$

wobei sich die Bedeutung dieses Ausdrucks erneut über eine Parameterdarstellung erschließt: Für jedes differenzierbare Funktionenpaar $x(t)$, $y(t)$ im Definitionsbereich von F gilt gemäß der „Kettenregel im $\mathbb{R}^n$“ die Identität

$$\frac{\mathrm{d}F\big(x(t),y(t)\big)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}\ . \tag{**II**.4.10}$$

Eine (symmetrische Darstellung einer) DGL ist also genau dann exakt, wenn sie die Form $\mathrm{d}F(x,y) = 0$ besitzt.
Exakte DGLn sind nun sehr leicht zu lösen:

Die Funktionen g, h seien in einem Gebiet $D \in \mathbb{R}^2$ stetig; es gelte $g^2 + h^2 > 0$. Ist dann die DGL

$$g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

in D exakt und ist F eine in D stetig differenzierbare Stammfunktion, so erhält man sämtliche Lösungskurven dieser DGL durch Auflösen der Gleichungen $F(x,y) = c$ mit beliebigen Konstanten c.

Der Beweis ist einfach: Für jedes stetig differenzierbare Funktionenpaar $x(t)$, $y(t)$, dessen Kurvenbild in D verläuft, gilt die Identität

$$g\dot{x} + h\dot{y} \;=\; \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(x(t), y(t)\big)\;. \qquad (\mathbf{II}.4.11)$$

Damit ist $x(t)$, $y(t)$ genau dann Lösung von $g\dot{x} + h\dot{y} = 0$, wenn $F\big(x(t), y(t)\big) = c$ für eine Konstante c.

■ **Beispiel:** Eine exakte DGL.

Die DGL

$$\big(y^2\mathrm{e}^{xy} + 3x^2y\big)\,\mathrm{d}x + \big(x^3 + (1+xy)\mathrm{e}^{xy}\big)\,\mathrm{d}y = 0$$

ist in $\mathbb{R}^2$ exakt; eine Stammfunktion ist

$$F(x,y) = y\left(\mathrm{e}^{xy} + x^3\right)\;.$$

Denn: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= y\left(y\mathrm{e}^{xy} + 3x^2\right)\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \mathrm{e}^{xy} + x^3 + xy\mathrm{e}^{xy}\;,\end{aligned}$$

so dass die partiellen Ableitungen der Stammfunktion genau die Koeffizientenfunktionen der DGL reproduzieren, wie gefordert. ■

Es stellt sich nun die sehr wichtige Frage, woran man erkennen kann, ob eine DGL exakt ist, und wie man in diesem Fall eine Stammfunktion findet. Die Antwort darauf liefert der folgende Satz:

Die Funktionen $g(x,y)$, $h(x,y)$ seien in einem Gebiet $D \in \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, und D sei einfach zusammenhängend. *Dann besitzt die DGL*

$$g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

genau dann eine Stammfunktion $F(x,y)$, wenn

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}\;.$$

Die Stammfunktion erhält man als Kurvenintegral,

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \Big(g(x',y')\mathrm{d}x' + h(x',y')\mathrm{d}y'\Big)\;,$$

wobei $(x_0,y_0) \in D$ ein fester Punkt ist und längs eines beliebigen Weges $\mathcal{C}$ integriert wird, der (x_0,y_0) und (x,y) verbindet.

Bevor dieser Satz wegen seiner herausgehobenen Bedeutung für die Potentialtheorie und damit für die Theoretische Mechanik und die Elektrodynamik im Detail bewiesen wird, muss zunächst der hier auftauchende Begriff des *Kurvenintegrals* erläutert werden.

II.5 *Einschub*: Kurvenintegrale

Alle Überlegungen in diesem Abschnitt beziehen sich auf den zweidimensionalen „Anschauungsraum“ $\mathbb{R}^2$, können aber sofort auf den $\mathbb{R}^3$ (oder sogar den $\mathbb{R}^n$ mit beliebigem $n > 3$!) übertragen werden.
Zunächst die zentralen Definitionen: Unter einem (zweidimensionalen) *Vektorfeld* versteht man eine Zuordnung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \vec{r} \;\to\; \vec{v}(\vec{r}) \;=\; \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} . \qquad (\mathbf{II}.5.1)$$

Unter einen *Kurvenintegral* (auch: *Linienintegral*) dieses Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ längs eines Weges $\mathcal{C}$ versteht man die Zahl

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}(\vec{r}) \;&=\; \int_{\mathcal{C}} \Big(g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y \Big) \\ &=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\; \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{v}\big(\vec{r}(t)\big) \\ &=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \Big(g\big(x(t),y(t)\big)\dot{x}(t) + h\big(x(t),y(t)\big)\dot{y}(t) \Big) . \qquad (\mathbf{II}.5.2) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad t_1 \le t \le t_2 \qquad (\mathbf{II}.5.3)$$

eines Parametrisierung des Integrationsweges $\mathcal{C}$; somit ist $\vec{r}(t_1)$ der Anfangs- und $\vec{r}(t_2)$ der Endpunkt von $\mathcal{C}$.

■ **Beispiel:** Berechnung von Kurvenintegralen.

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 6xy^3 \\ 9x^2y^2 \end{pmatrix} . \qquad (\mathbf{II}.5.4)$$

Der Weg $\mathcal{C}_1$ führe auf gerader Linie von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad 0 \le t \le 1 .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}(\vec{r}) \;&=\; \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6t^4 \\ 9t^4 \end{pmatrix} \\ &=\; \int_0^1 \mathrm{d}t\, 15t^4 \\ &=\; 3t^5\Big|_0^1 \\ &=\; 3 . \end{aligned}$$

Das gleiche Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ soll nun auch noch entlang eines zweiten Weges $\mathcal{C}_2$ integriert werden, der parallel zu den Koordinatenachsen ebenfalls von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft :

$$\mathcal{C}_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Genauer: $\mathcal{C}_2$ besteht aus zwei Teilstücken, parametrisiert durch

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad 0 \le t \le 1$$

und

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad 0 \le t \le 1 .$$

Das liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6t^3 \\ 9t^2 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}t \, 9t^2 \\ &= 3t^3 \Big|_0^1 \\ &= 3 . \end{aligned}$$

In diesem speziellen Beispiel gilt somit $\int_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r})$, d.h. das Ergebnis der Integration ist für die beiden Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ identisch. ■

Die entscheidend wichtige Frage, wann ein Kurvenintegral vom genauen Verlauf des Weges zwischen gegebenen Anfangs- und Endpunkten unabhängig ist, wird durch den folgenden Satz beantwortet:

Ein Kurvenintegral über ein Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix}$$

ist genau dann nur von dem Anfangs- und Endpunkt eines Integrationsweges $\mathcal{C}$, nicht aber von dessen Verlauf abhängig, wenn eine Funktion $F(x,y)$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$g = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad , \qquad h = \frac{\partial F}{\partial y} .$$

Die Parallelen zum vorherigen Abschnitt sind nun offensichtlich: Der Satz besagt, dass Kurvenintgrale über ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ genau dann *wegunabhängig* sind, wenn

$$g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y = \mathrm{d}F \;, \tag{**II**.5.5}$$

wenn also das aus den Komponenten von $\vec{v}(\vec{r})$ gebildete Differential eine Stammfunktion F besitzt und somit exakt ist. Im vorherigen Beispiel (**II**.5.4) hat man $g(x,y) = 6xy^3$ sowie $h(x,y) = 9x^2y^2$. Daher ist $F(x,y) = 3x^2y^3$ eine mögliche Stammfunktion; die Existenz dieser Stammfunktion garantiert die Wegunabhängigkeit *aller* Integrale über dieses Vektorfeld.
Eine Richtung des Beweises ist sehr einfach: Wenn eine Funktion F existiert mit $\frac{\partial F}{\partial x} = g$, $\frac{\partial F}{\partial y} = h$, dann gilt für jeden Weg $\mathcal{C} : t \to \vec{r}(t)$, der von $\vec{r}(t_1)$ nach $\vec{r}(t_2)$ führt, die Identität

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}(\vec{r}) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\; \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{v}\big(\vec{r}(t)\big) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Big(g\big(x(t),y(t)\big)\dot{x}(t) + h\big(x(t),y(t)\big)\dot{y}(t)\Big) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(x(t),y(t)\big) \\
&= F\big(\vec{r}(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2} \;;
\end{aligned} \tag{**II**.5.6}$$

der Ausdruck auf der rechten Seite hängt offensichtlich nicht vom Verlauf des Weges, sondern nur von dessen Anfangs- und Endpunkt ab.
Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass alle Kurvenintegrale über $\vec{v}(\vec{r})$ nur von Anfangs- und Endpunkt, nicht aber vom Verlauf des Weges abhängen. Dann ist die Funktion

$$F(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r}\,'\cdot\vec{v}(\vec{r}\,') \tag{**II**.5.7}$$

mit beliebigem, aber festgehaltenen Anfangspunkt $\vec{r}_0$ wohldefiniert, da ja alle Wege, die von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ führen, das gleiche Resultat liefern, die Wahl des für die Integration benutzten Weges also unerheblich ist. Dann gilt auch

$$\begin{aligned}
F(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - F(\vec{r}) &= \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r}\,'\cdot\vec{v}(\vec{r}\,') \\
&= \Delta\vec{r}\cdot\vec{v}(\vec{r}\,'')
\end{aligned} \tag{**II**.5.8}$$

mit geeignetem Zwischenwert $\vec{r}\,''$, der sich für $\Delta\vec{r}\to\vec{0}$ auf $\vec{r}$ zubewegt. Andererseits gilt für $F(\vec{r}) \equiv F(x,y)$ die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}
F(x+\Delta x, y+\Delta y) &= F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y \\
&\quad + (\text{Terme höherer Ordnung}) \;.
\end{aligned} \tag{**II**.5.9}$$

Abbildung **II**.2: Wenn D aus der Bildebene besteht, wobei jedoch der schraffierte Bereich ausgenommen ist, gibt es Kurven $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, die zwei Punkte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ verbinden, aber nicht stetig ineinander deformiert werden können, ohne D zu verlassen.

Im Grenzfall $\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \to \vec{0}$ erhält man daraus die Behauptung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = v_x = g \qquad , \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = v_y = h \; , \tag{**II**.5.10}$$

d.h. die durch Gleichung (**II**.5.7) definierte Funktion F hat genau die geforderten Eigenschaften einer Stammfunktion.
Mit diesem Werkzeug kann nun endlich der am Ende von Abschnitt **II**.4 formulierte zentrale Satz bewiesen werden: Zu zeigen ist, dass die auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet D definierte DGL

$$g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{**II**.5.11}$$

genau dann eine Stammfunktion besitzt, wenn die *Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \tag{**II**.5.12}$$

erfüllt wird.
Dazu muss zunächst der Begriff des *einfachen Zusammenhangs* von D geklärt werden: Damit ist gemeint, dass jede vollständig in D verlaufende geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne D zu verlassen. Falls das nicht gewährleistet ist, kann man zwei Punkte $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ in D durch zwei Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ verbinden, die innerhalb von D nicht ineinander deformiert werden können, wie in der Abbildung **II**.2 verdeutlicht wird.
Eine Richtung des Beweises ist nun erneut sehr einfach: Angenommen, es existiert eine Stammfunktion $F(x,y)$. Dann hat man sofort

$$\frac{\partial g}{\partial y} \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; \frac{\partial h}{\partial x} \tag{**II**.5.13}$$

wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen von F; hier wird der einfache Zusammenhang von D nicht benötigt.
Zu zeigen ist nun umgekehrt, dass die Integrabilitätsbedingung (**II**.5.12) sogar hinreichend ist für die Existenz einer Stammfunktion, sofern der Definitionsbereich D von f, g einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall kann eine Funktion $F(x, y)$ durch

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \Big(g(x',y')\mathrm{d}x' + h(x',y')\mathrm{d}y' \Big) \tag{**II**.5.14}$$

definiert werden, wobei der Anfangspunkt $(x_0, y_0) \in D$ beliebig ist und *alle* Wege von (x_0, y_0) nach (x, y) stetig ineinander deformiert werden können, ohne D zu verlassen: Es ist einfach zu sehen, dass sich der Wert des Integrals bei einer *stetigen* Verformung des Integrationsweges nicht verändern kann. *(Übungsaufgabe!)*
Im günstigsten Fall verläuft schon der Weg

$$\mathcal{C} : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \tag{**II**.5.15}$$

der aus nur zwei Teilstücken parallel zu den Koordinatenachsen zusammengesetzt ist, vollständig in D. Dann kann man diesen Weg zur Auswertung des Integrals (**II**.5.14) heranziehen und erhält

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, g(x', y_0) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y'\, h(x, y') \; . \tag{**II**.5.16}$$

Daraus ergibt sich einerseits

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = h(x,y) \; , \tag{**II**.5.17}$$

andererseits nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= g(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y'\, \frac{\partial h(x,y')}{\partial x} \\ &= g(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y'\, \frac{\partial g(x,y')}{\partial y'} \\ &= g(x,y_0) + g(x,y')\Big|_{y'=y_0}^{y'=y} \\ &= g(x,y) \; . \end{aligned} \tag{**II**.5.18}$$

Wenn das Gebiet D jedoch ungünstig geformt ist, kann es vorkommen, dass der Integrationsweg aus mehreren parallel zu dem Achsen verlaufenden Teilstücken zusammengesetzt werden muss, um vollständig in D liegen zu können. Für einen solchen komplizierteren, weil vielfach zusammengesetzten Weg $\widetilde{\mathcal{C}}$ lässt sich jedoch das in der Umformung (**II**.5.18) deutlich werdende Prinzip ungeändert übernehmen und führt zum gleichen Resultat, nämlich $\frac{\partial F}{\partial x} = g$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = h$ für *jeden*, beliebig fein zusammengestückelten Weg $\widetilde{\mathcal{C}}$ von (x_0, y_0) nach (x, y). Damit ist alles gezeigt.

Die Tatsache, dass für die Wegunabhängigkeit von Linienintegralen nicht nur die Integrabilitätsbedingung (**II**.5.12), sondern auch der einfache Zusammenhang des betrachteten Gebietes vorausgesetzt werden muss, deutet eine bemerkenswerte Verbindung von Analysis und Topologie an. Es ist wichtig zu wissen, dass sich aus dieser Verbindung interessante Konsequenzen auch für die Physik ergeben!

■ **Beispiel:** Zur Bedeutung des einfachen Zusammenhangs.

Es sei nun

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{-y}{x^2+y^2} \\ h(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2}\ . \end{aligned}$$

Dafür findet man sofort die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ . \end{aligned}$$

Wenn nun alle Linienintegrale über das Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ wegunabhängig wären, müssten Integrale über *geschlossene* Kurven stets verschwinden. Man betrachte aber als Integrationspfad $\mathcal{C}$ einen Kreis um den Ursprung vom Radius R:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} \qquad , \quad 0 \le t \le 2\pi\ .$$

Für diesen geschlossenen Pfad gilt dann

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \big(\sin^2 t + \cos^2 t\big) \\ &= 2\pi\ . \end{aligned}$$

Das Integral von $\vec{v}(\vec{r})$ über den Kreis $\mathcal{C}$ verschwindet also *nicht*, obwohl $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$! Das zeigt, dass die scheinbar „technische“ Forderung nach dem einfachen Zusammenhang des Definitionsbereiches D von g, h sehr ernst genommen werden muss, denn sie ist in diesem Beispiel *nicht* erfüllt: Hier ist $D = \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ nicht einfach zusammenhängend! Dieses „Definitionsloch“ ermöglicht trotz der Gleichheit von $\frac{\partial g}{\partial y}$ und $\frac{\partial h}{\partial x}$ nichtverschwindende Integrale über geschlossene Kurven um den Ursprung. ■

II.6 Implizite DGLn

In den Parameterdarstellungen $x(t)$, $y(t)$, die bisher zur Lösung von symmetrischen DGLn der Form (**II**.4.4) herangezogen wurden, war der Parameter t stets beliebig und konnte daher geeignet gewählt werden. In manchen Fällen ist es nützlich, speziell

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \tag{**II**.6.1}$$

als Parameter zu verwenden: Auf diese Weise lassen sich viele *implizite* DGLn lösen. Sei nämlich $\varphi(x)$ Lösung einer Gleichung $F(x, y, y') = 0$. Sofern dann $\varphi'' \neq 0$, d.h. sofern der Graph von φ konvex oder konkav ist, ist die Beziehung $p = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ nach x auflösbar, und man hat die Parameterdarstellung $x(p)$, $y(p) = \varphi\big(x(p)\big)$ der Lösungskurve. Die Kettenregel liefert dann

$$\dot{y}(p) = p\dot{x}(p) \;, \tag{**II**.6.2}$$

wobei $\dot{y}(p) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}$ und $\dot{x}(p) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}$. Damit lassen sich z.B. DGLn der folgenden Typen lösen:

$$\boxed{x = g(y')} \tag{**II**.6.3}$$

Hier ist $x(p) = g(p)$ bereits gegeben; $y(p)$ folgt aus der Beziehung (**II**.6.2). Die Lösungskurven sind dann

$$\begin{aligned} x(p) &= g(p) \\ y(p) &= \int \mathrm{d}p\, p\dot{g}(p) + c \;. \end{aligned} \tag{**II**.6.4}$$

$$\boxed{y = g(y')} \tag{**II**.6.5}$$

Auch hier erhält man die Lösungskurven sofort aus der Beziehung (**II**.6.2):

$$\begin{aligned} y(p) &= g(p) \\ x(p) &= \int \mathrm{d}p\, \frac{\dot{g}(p)}{p} + c \;. \end{aligned} \tag{**II**.6.6}$$

$$\boxed{y = xy' + g(y')} \tag{**II**.6.7}$$

Diese ungewöhnlich interessante DGL ist nach dem französischen Mathematiker Alexis-Claude Clairaut benannt.[4] Mit $y' = p$ erhält sie die Form

$$y(p) = x(p)p + g(p) \;; \tag{**II**.6.8}$$

[4] *Nach Wikipedia:* Alexis-Claude Clairaut (geb. am 3. Mai 1713 in Paris; gest. am 17. Mai 1765 in Paris) war ein französischer Mathematiker, Geodät und Astronom. Mit 18 Jahren wurde er mit einer Sondergenehmigung des Königs als bisher jüngstes Mitglied in die Pariser *Académie des sciences* aufgenommen, nachdem seine 1729 fertiggestellte Abhandlung über neuartige Raumkurven große Aufmerksamkeit erregt hatte. 1736 nahm er an einer Lappland-Expedition teil, die zur Bestimmung der Idealgestalt der Erdoberfläche — des Erdellipsoids — unternommen wurde. Clairauts theoretische Auswertung führte zu seinem Werk *Theorie der Erdgestalt nach Gesetzen der Hydrostatik* (1743), das ein Klassiker der Geodäsie wurde. Diese Untersuchungen über mögliche Gleichgewichtsfiguren führten ihn mehr und mehr zur Astronomie. Hier nahm er sich des Dreikörperproblems an, dessen Lösung er 1747 der Akademie unterbreitete.

Abbildung **II**.3: Lösungen der Clairautschen DGL $y = xy' + \mathrm{e}^{y'}$ sind einerseits die Funktion $y(x) = x\big(\ln(-x) - 1\big)$ für $x < 0$, andererseits die Tangenten an deren Graphen.

Differentiation nach p liefert

$$\dot{y} = p\dot{x} + x + \dot{g} \; . \tag{**II**.6.9}$$

Da nun wieder $\dot{y} = p\dot{x}$, hat man die Lösungskurven

$$\begin{aligned} x(p) &= -\dot{g}(p) \\ y(p) &= -p\dot{g}(p) + g(p) \; . \end{aligned} \tag{**II**.6.10}$$

Es gibt jedoch weitere Lösungen, nämlich die Geraden

$$y = cx + g(c) \; . \tag{**II**.6.11}$$

Der dem Parameterwert $p = c$ entsprechende Kurvenpunkt

$$\begin{aligned} x(c) &= -\dot{g}(c) \\ y(c) &= -c\dot{g}(c) + g(c) \end{aligned} \tag{**II**.6.12}$$

liegt offensichtlich auf dieser Geraden; Gerade und Kurve haben in diesem Punkt dieselbe Steigung c. Die Geraden bilden also die *Tangenten* an die Kurve; die Kurve ist die *Enveloppe* (Einhüllende) der Geradenschar.

■ **Beispiel:** Die DGL $y = xy' + \mathrm{e}^{y'}$.

Lösungen der Clairaut-DGL

$$y = xy' + \mathrm{e}^{y'}$$

sind gemäß Gleichung (**II**.6.11) einerseits die Geraden

$$y = cx + \mathrm{e}^{c} \; ,$$

andererseits gemäß Gleichung (**II**.6.10) deren Enveloppe

$$\begin{aligned} x(p) &= -\mathrm{e}^p \\ y(p) &= -p\mathrm{e}^p + \mathrm{e}^p \ . \end{aligned}$$

Damit ist $p = \ln(-x)$, und man kann die Enveloppe in expliziter Form angeben:

$$\begin{aligned} y(x) &= -\ln(-x)(-x) - x \\ &= x\big(\ln(-x) - 1\big) \qquad \text{für} \quad x < 0 \ . \end{aligned}$$

Bemerkenswert ist, dass die Lösungen einer Clairaut-DGL angegeben werden können, ohne ein Integral berechnen zu müssen. ■

Die Idee, den Graphen einer Funktion als Einhüllende seiner Tangenten darzustellen, liegt auch der *Legendre-Transformation* zugrunde:[5] Gegeben ist eine Funktion $y(x)$ einer reellen Variablen x ; anstelle dieser unabhängigen Variablen x soll die Funktion nun durch die neue Variable $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, also durch die Steigung ihres Graphen bei x beschrieben werden. Dazu ist zunächst zu fordern, dass die Funktion $p(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$ eindeutig nach x aufgelöst werden kann: Es darf nicht an zwei Stellen x die gleiche Steigung auftreten; der Graph der Funktion $y = y(x)$ muss also *konvex oder konkav* sein. Unter dieser Voraussetzung kann das „alte“ Argument x als Funktion des „neuen“ dargestellt werden: $x = x(p)$.
Man könnte nun versuchen, einfach y durch die neue Variable auszudrücken:

$$y = y\big(x(p)\big) \equiv f(p) \ . \tag{**II**.6.13}$$

Aber: Die Kenntnis dieser neuen Funktion $y = f(p)$ reicht nicht aus, um die ursprüngliche Kurve $y = y(x)$ zu reproduzieren. Man hat ja nun eine DGL der Form

$$y = f(y') \qquad \text{oder} \qquad y' = f^{-1}(y) \ . \tag{**II**.6.14}$$

Ist $y = y(x)$ eine Lösung dieser DGL, dann auch $y(x + c)$. (Beispiel: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$ wird gelöst durch $y(x) = \mathrm{e}^{x+c}$.) Wegen der Freiheit der Integrationskonstanten erhält man also nicht nur die gesuchte Kurve, sondern eine ganze Schar dazu parallel verschobener Kurven. Die ursprüngliche Kurve gehört zwar zu dieser Schar, kann aber in dieser Schar nicht mehr identifiziert werden: Man hat „Information verloren“.
Um dennoch eine Funktion der Steigung p anzugeben, die die gesamte Information der ursprünglichen Funktion $y = y(x)$ enthält, stellt man den Graphen dieser Funktion als Einhüllende seiner Tangenten dar: Jede Tangente wird festgelegt durch die Steigung p_0 der Kurve im Berührpunkt *und* durch ihren *Achsabschnitt* $\widehat{y}_0$, wie in der Abbildung **II**.4

[5] *Nach Wikipedia:* Adrien-Marie Legendre (geb. am 18. September 1752 in Paris; gest. am 10. Januar 1833 ebenda) war ein französischer Mathematiker. Legendre leistete wichtige Beiträge auf den unterschiedlichsten Gebieten der Mathematik. Er fand eine asymptotische Formel für die Primzahlverteilung und bewies den Großen Fermatschen Satz für den Spezialfall $n = 5$. In der Analysis ist Legendre nicht nur für seine z.B. in der Potentialtheorie benutzten Legendre-Polynome bekannt, sondern auch für seine Arbeiten über elliptische Integrale, deren Einteilung in drei „Gattungen“ auf ihn zurückgeht. Von bleibendem Einfluss war auch das zuerst 1794 erschienene Geometrielehrbuch von Legendre, in dem er die Elemente von Euklid vereinfachte und modernisierte.

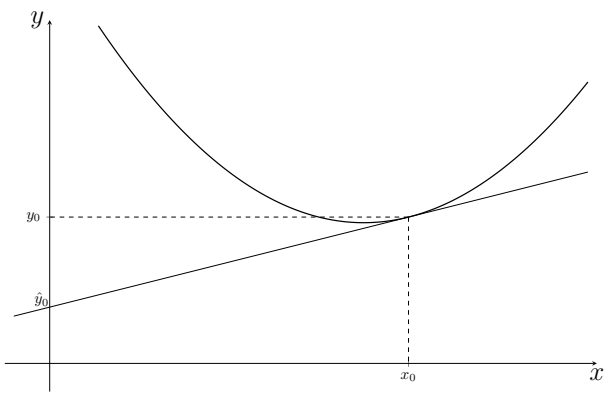

Abbildung **II**.4: Zur Legendre-Transformation: Die Funktion $y = y(x)$ soll beschrieben werden, indem für jeden Punkt x_0 die Steigung $p_0 = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x|_{x_0}$ als unabhängiges Argument verwendet wird. Um dann den Graphen der Funktion und damit die Funktion selbst eindeutig rekonstruieren zu können, benötigt man neben der Steigung p_0 noch den Achsabschnitt $\widehat{y}_0$ der Tangente bei x_0.

skizziert. Nach Voraussetzung über die Konvexität oder Konkavität gehort zu jedem p ein eindeutig bestimmtes $\widehat{y}(p)$: Man hat die „Achsabschnittsfunktion“ $\widehat{y} = \widehat{y}(p)$. Da nun (Steigungsdreieck!)

$$p = \frac{y - \widehat{y}}{x - 0} \,, \tag{**II**.6.15}$$

findet man für den Achsabschnitt als Funktion der Steigung den Ausdruck

$$\widehat{y}(p) = y\big(x(p)\big) - px(p) \,. \tag{**II**.6.16}$$

Diese Achsabschnittsfunktion heißt *Legendre-Transformierte* von $y(x)$. Man beachte, dass bei dieser Transformation keine Information über den Graphen von y (und damit über die Funktion selbst) verloren geht: Der Graph wird nun nicht mehr beschrieben durch die Gesamtheit der Punkte (x_0, y_0), sondern als Einhüllende seiner Tangenten. Damit ermöglicht die Legendre-Transformation einen *Wechsel der unabhängigen Variablen ohne Informationsverlust.* Diese Tatsache wird in der Theoretischen Mechanik genutzt, um von den „generalisierten Geschwindigkeiten“ zu den „generalisierten Impulsen“ als neuen Variablen überzugehen, sowie insbesondere in der Thermodynamik, um von einem thermodynamischen Potential zum anderen zu wechseln.

■ **Beispiel:** Legendre-Transformation der Funktion $y(x) = \frac{1}{4}x^4$.

Die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4$$

ist konvex, kann also ohne Einschränkung Legendre-transformiert werden. Man hat

$$y'(x) \;=\; x^3 \;= p \,;$$

Umkehrung ergibt

$$x(p) = p^{1/3} .$$

Damit lautet die Legendre-Transformierte

$$\begin{aligned} \widehat{y}(p) &= \frac{1}{4}(p^{1/3})^4 - p\,p^{1/3} \\ &= -\frac{3}{4}p^{4/3} . \end{aligned}$$

Für $y(x) = \frac{1}{4}x^4$ ist daher $\widehat{y}(p) = -\frac{3}{4}p^{4/3}$. ■

Das Konstruktionsprinzip der Legendre-Transformierten als der Einhüllenden einer Tangentenschar zeigt, dass ein enger Zusammenhang zwischen dieser Transformation und der Clairaut-DGL besteht: Ist $y(x)$ die „Nicht-Geradenlösung“ der Clairautschen DGL

$$y = xy' + g(y') , \tag{**II**.6.17}$$

so ist $g(p)$ die Legendre-Transformierte von $y(x)$; es gilt also $g(p) = \widehat{y}(p)$.

■ **Beispiel:** Clairaut-DGL und Legendre-Transformation.

Gegeben ist nun die Clairaut-DGL

$$y = xy' - \frac{3}{4}y'^{4/3} ,$$

so dass hier $g(p) = -\frac{3}{4}p^{4/3}$. Eine Parameterdarstellung der „Nicht-Geradenlösung“ erhält man aus den bekannten Gleichungen (**II**.6.10):

$$\begin{aligned} x(p) &= -\dot{g}(p) \\ &= p^{1/3} ; \\ y(p) &= -p\dot{g}(p) + g(p) \\ &= p\,p^{1/3} - \frac{3}{4}p^{4/3} \;=\; \frac{1}{4}p^{4/3} . \end{aligned}$$

Da $p = x^3$, hat man sofort die Lösung in expliziter Form:

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 .$$

Das war aufgrund des vorherigen Beispiels zur Legendre-Transformation zu erwarten: Für diese Funktion $y(x)$ ist $\widehat{y}(p) = -\frac{3}{4}p^{4/3} = g(p)$. ■

III Newtonsche Mechanik

Aufgabe der klassischen Mechanik ist die Beschreibung und Erklärung der Bewegung makroskopischer Körper unter dem Einfluss äußerer Kräfte. Dabei werden sehr einfache Annahmen über die Natur von „Raum“ und „Zeit“ zugrunde gelegt, die selbstverständlich erscheinen mögen, die jedoch später im Rahmen der Relativitätstheorie korrigiert werden müssen. Weiterhin kann eine der Grundvoraussetzungen der klassischen Mechanik, nämlich die gleichzeitige Kenntnis von Ort und Impuls eines Teilchens etwa als Anfangsbedingungen zur Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung, im Rahmen der Quantenmechanik nicht erfüllt werden. Dennoch ist die Newtonsche Mechanik[1] eine sehr erfolgreiche Theorie, die innerhalb ihres eingeschränkten Gültigkeitsbereiches alle mechanischen Vorgänge korrekt zu beschreiben vermag.

III.1 Grundlegende Prinzipien der Mechanik

Da die Bewegung eines Objektes durch die Position aller seiner „Ortspunkte“ beschrieben wird, die „nacheinander durchlaufen“ werden, muss zunächst vereinbart werden, wie die Position eines solchen Punktes spezifiziert wird: Das geschieht durch Wahl eines geeigneten Bezugssystems, innerhalb dessen ein Koordinatensystem errichtet wird. Am bekanntesten ist das kartesische Koordinatensystem;[2] sehr gebräuchlich sind auch sphärische oder zylindrische Polarkoordinaten.
Wenn das Bezugssystem gegeben ist, kann die Position eines Punktes durch Angabe des Ortsvektors $\vec{r}$ festgelegt werden, der vom Ursprung des Systems zum Punkt weist. In einem kartesischen System dienen als Koordinaten des Punktes dann die Komponenten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ von $\vec{r}$ bezüglich der vorher fixierten Achsen des Systems. Man schreibt

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i \ , \qquad (\textbf{III}.1.1)$$

[1] *Nach Wikipedia:* Sir Isaac Newton (geb. am 25. Dezember 1642 nach dem julianischen bzw. am 4. Januar 1643 nach dem gregorianischen Kalender in Woolsthorpe-by-Colsterworth in Lincolnshire; gest. am 20. März 1726 (jul.) / 31. März 1727 (greg.) in Kensington) war ein englischer Naturforscher und Verwaltungsbeamter. In der Sprache seiner Zeit, die zwischen natürlicher Theologie, Naturwissenschaften und Philosophie noch nicht scharf trennte, wurde Newton als Philosoph bezeichnet. Isaac Newton ist der Verfasser der *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, in denen er mit seinem Gravitationsgesetz die universelle Gravitation beschrieb und die Bewegungsgesetze formulierte, womit er den Grundstein für die klassische Mechanik legte. Fast gleichzeitig mit Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelte Newton die Infinitesimalrechnung. Er verallgemeinerte das binomische Theorem mittels unendlicher Reihen auf beliebige reelle Exponenten. Bekannt ist er auch für seine Leistungen auf dem Gebiet der Optik: Die von ihm verfochtene Teilchentheorie des Lichtes und die Erklärung des Lichtspektrums.

[2] *Nach Wikipedia:* René Descartes (latinisiert Renatus Cartesius; geb. am 31. März 1596 in La Haye en Touraine; gest. am 11. Februar 1650 in Stockholm) war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler. Descartes gilt als der Begründer des modernen frühneuzeitlichen Rationalismus; das in seinem Sinne rationalistische Denken wird auch Cartesianismus genannt. Von ihm stammt das berühmte Dictum *ecogito ergo sum* (ich denke, also bin ich), welches die Grundlage seiner Metaphysik bildet, aber auch das Selbstbewusstsein als genuin philosophisches Thema eingeführt hat. Darüber hinaus ist Descartes der Begründer der analytischen Geometrie, welche Algebra und Geometrie verbindet.

wobei $\vec{e}_i$ der Einheitsvektor in Richtung der i-ten Achse ist. Damit wird implizit angenommen, dass der physikalische Raum die mathematischen Eigenschaften eines dreidimensionalen euklidischen Raumes besitzt, also dem $\mathbb{R}^3$ isomorph ist. Diese Annahme ist jedoch keineswegs selbstverständlich, sondern bedarf der Überprüfung durch reale Messungen, wie sie bereits durch Carl Friedrich Gauß unternommen wurden.[3]
Gerne verwendet man die „Einsteinsche Summenkonvention“, so dass Summenzeichen unterdrückt werden und automatisch über doppelt vorkommende Indizes summiert wird:

$$\vec{r} = x_i \vec{e}_i \ . \tag{**III**.1.2}$$

Die Bewegung eines physikalischen (d.h. realen und damit ausgedehnten) Teilchens kann häufig durch die Bewegung eines äquivalenten „Punktteilchens“ zutreffend beschrieben werden. Man benötigt dann einen reellen Parameter t, um die verschiedenen nacheinander durchlaufenen Positionen anzugeben:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \ . \tag{**III**.1.3}$$

Dieser Parameter t muss die Eigenschaft haben, monoton zu wachsen, während sich $\vec{r}(t)$ von „früheren“ zu „späteren“ Positionen bewegt. Das setzt voraus, dass „früher“ und „später“ in einem objektiven Sinn klar definiert sind: Ist $t_1 < t_2$, so findet man das Teilchen bei $\vec{r}(t_2)$, nachdem es bei $\vec{r}(t_1)$ gewesen ist. Der Parameter t entspricht dann der intuitiven Vorstellung von der „Zeit“, so dass die Zeit durch die reelle Achse repräsentiert werden kann. Damit sind „Raum“ und „Zeit“ im Rahmen der Newtonschen Mechanik vollkommen unabhängig voneinander.[4] Es ist jedoch wichtig zu beobachten, dass damit die Länge von Zeitintervallen sowie deren Messung noch nicht festgelegt ist, das Zeitkonzept also weiterer Präzisierungen bedarf.

[3] *Nach Wikipedia:* Johann Carl Friedrich Gauß (geb. am 30. April 1777 in Braunschweig; gest. am 23. Februar 1855 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Seine überragenden wissenschaftlichen Leistungen waren schon seinen Zeitgenossen bewusst. Mit 18 Jahren entwickelte er die Grundlagen der modernen Ausgleichungsrechnung und der mathematischen Statistik (Methode der kleinsten Quadrate), mit der er 1800 die Wiederentdeckung des ersten Asteroiden Ceres ermöglichte. Auf Gauß gehen die nichteuklidische Geometrie, zahlreiche mathematische Funktionen, Integralsätze, die Normalverteilung, erste Lösungen für elliptische Integrale und die gaußsche Osterformel zurück. 1807 wurde er zum Universitätsprofessor und Sternwartendirektor in Göttingen berufen und später auch mit der Landesvermessung des Königreichs Hannover betraut. Neben der Zahlen- und der Potentialtheorie erforschte er u.a. das Erdmagnetfeld.

Es wird berichtet, Gauß habe bei Gelegenheit der Hannoverschen Landesvermessung empirisch nach einer Abweichung der Winkelsumme besonders großer Dreiecke vom euklidischen Wert 180 Grad gesucht — wie etwa bei dem Dreieck, das vom Brocken im Harz, dem Inselsberg im Thüringer Wald und dem Hohen Hagen bei Dransfeld gebildet wird. Die Vermessung durch Gauß ist belegt, die Vermutung zur Motivation ist dagegen unsicher. Max Jammer schrieb über diese gaußsche Messung und ihr Ergebnis: *Er vermaß [...] ein durch drei Berge, den Brocken, den Hohen Hagen und den Inselberg gebildetes Dreieck, dessen Seiten 69, 85 und 107 km maßen. Es braucht kaum eigens gesagt zu werden, dass er innerhalb der Fehlergrenze keine Abweichung von 180° entdeckte und daraus den Schluss zog, die Struktur des wirklichen Raumes sei, soweit die Erfahrung darüber eine Aussage erlaubt, euklidisch.*

[4] Mit den Worten von Isaac Newton: *Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.* (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica; London 1687.)

Eine weitere wichtige Größe ist dann der (räumliche) *Abstand* zwischen zwei Punkten. Die jeweilige Abstandsdefinition liefert die Metrik das Raumes, auf den sie sich bezieht. Die euklidische Metrik (d.h. die Metrik eines euklidischen Raumes) bewertet den Abstand $D(\vec{x},\vec{y})$ zwischen zwei Punkten $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mit Koordinaten x_i und y_i durch die Zahl

$$D(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2}\ . \tag{**III**.1.4}$$

Ist nun der reelle Parameter t die übliche Zeit und $\vec{r}(t)$ die von einem Punktteilchen durchlaufene Trajektorie im Raum, so ist

$$\vec{v}(t) \ = \ \dot{\vec{r}}(t) \ = \ \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{**III**.1.5}$$

seine Geschwindigkeit. Es ist häufig sinnvoll, $\vec{v}$ durch die schon in Abschnitt **I**.2 eingeführte Bogenlänge auszudrücken: Sei u irgendein Parameter, der entlang der Trajektorie glatt und monoton zunimmt; $\vec{r}(u_1)$ und $\vec{r}(u_2)$ seien zwei beliebige Punkte auf dieser Bahn. Mit Hilfe der Abstandsdefinition (**III**.1.4) ergibt sich dann der entlang der Trajektorie gemessene Abstand zwischen den beiden Punkten zu

$$s(u_1,u_2) = \int_{u_1}^{u_2}\mathrm{d}u\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u}\right)^{1/2}\ , \tag{**III**.1.6}$$

wobei die Summenkonvention verwendet wird. Diese Definition der Bogenlänge s ist *unabhängig* von dem Parameter u; die Trajektorie könnte mit stets gleichem Resultat z.B. durch die Zeit t oder auch durch s selbst parametrisiert worden sein.
Mit der Bogenlänge s als Parameter hat man nun

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\ . \tag{**III**.1.7}$$

Gemäß Abschnitt (**I**.2) ist $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \vec{T}$ der normierte Tangentialvektor entlang der Kurve. Weiterhin ist $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ der Betrag der Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = v\vec{T}\ . \tag{**III**.1.8}$$

Die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, also

$$\vec{a} \ = \ \dot{\vec{v}} \ = \ \ddot{\vec{r}} \ = \ \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\ , \tag{**III**.1.9}$$

ist die *Beschleunigung* des Teilchens. Damit hat man auch

$$\begin{aligned}\vec{a} \ &= \ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + v\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} \\ &= \ \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{T} + v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\ .\end{aligned} \tag{**III**.1.10}$$

Mit der bekannten Frenetschen Formel $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\vec{N}$, wobei κ wie schon zuvor in Abschnitt **I**.2 die Bahnkrümmung und $\vec{N}$ den Hauptnormalenvektor angibt, erhält man also

$$\vec{a} = \ddot{s}\,\vec{T} + \kappa v^2\vec{N}\ . \qquad (\mathbf{III}.1.11)$$

Diese Beziehung zeigt, dass der Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ in der lokalen Kurvenebene liegt, die von $\vec{T}$ und $\vec{N}$ aufgespannt wird. Selbst wenn sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert, d.h. wenn $\ddot{s} = 0$, ist $\vec{a}$ von $\vec{0}$ verschieden, sofern die Kurve gekrümmt ist, und zeigt dann in Richtung der Hauptnormalen. Bei verschwindender Krümmung, d.h. für $\kappa = 0$, zeigt $\vec{a}$ erwartungsgemäß in Richtung von $\vec{T}$.
Häufig werden an den Anfang der Newtonschen Mechanik die bekannten drei „Newtonschen Axiome“ gestellt. Allerdings ist dieser Einstieg in logischer Hinsicht unbefriedigend; die Newtonschen Axiome bilden kein Axiomensystem im Sinne der Mathematik. Der Versuch, den Inhalt dieser Axiome in logisch stimmiger Form auszudrücken, führt auf zwei Prinzipien:

Prinzip 1: Es existieren bestimmte ausgezeichnete Bezugssysteme, genannt *Inertialsysteme*, die die folgenden beiden Eigenschaften besitzen:

(i) Jedes isolierte („freie“) Teilchen bewegt sich in einem solchen Inertialsystem auf einer geraden Linie.

(ii) Wenn die Länge von Zeitintervallen derart festgelegt wird, dass sich ein bestimmtes isoliertes Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit in einem gegebenen Inertialsystem bewegt, dann bewegen sich alle anderen isolierten Teilchen in diesem System ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit.

Dieses Prinzip präzisiert das zuvor nur vage Zeitkonzept, indem festgelegt wird, wie „Zeit“ mit Hilfe freier Teilchen in Inertialsystemen gemesssen werden kann: Ein solches Teilchen legt gleiche Strecken in Zeitintervallen zurück, die definitionsgemäß die gleiche Länge besitzen sollen. Erst dann wird auf der Grundlage dieser Spezifizierung das erste Newtonsche Axiom (der „Trägheitssatz“) zusammengefasst. Die Existenz eines Inertialsystems, die hier *postuliert* wird, zieht die Existenz unendlich vieler weiterer nach sich, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Zwei Inertialsysteme können jedoch relativ zueinander nicht rotieren, da sich ein Teilchen, das sich in in einem der Systeme auf einer geraden Linie bewegt, in einem relativ dazu rotierenden System nicht ebenfalls auf einer geraden Linie bewegen kann.
Das folgende zweite Prinzip drückt die Erhaltung des Gesamtimpulses für wechselwirkende Zwei-Teilchen-Systeme aus. Das entspricht dem dritten Newtonschen Axiom („actio gleich reactio“):

Prinzip 2: Zwei Teilchen 1 und 2, die zwar von aller anderen Materie, aber nicht voneinander isoliert sind und aus einem Inertialsystem beobachtet werden, bewegen sich im allgemeinen *nicht* mit konstanten Geschwindigkeiten: Zwischen den Teilchen herschende *Wechselwirkungen* führen zu Beschleunigungen. Sei $\vec{v}_j(t)$ die Geschwindigkeit von Teilchen j (mit $j = 1, 2$). Dann existieren eine dimensionslose Konstante

$\mu_{12} > 0$ und ein *zeitunabhängiger* Vektor $\vec{K}$, so dass

$$\vec{v}_1(t) + \mu_{12}\vec{v}_2(t) = \vec{K} \ .$$

Dabei hängt $\vec{K}$ sowohl vom benutzten Inertialsystem als auch von den genauen Bewegungen der beiden Teilchen ab, μ_{12} dagegen *nicht*; μ_{12} ist sogar unabhängig von der Art der Wechselwirkung. Wenn solche Experimente weiterhin mit Teilchen 1 und einem dritten Teilchen 3 oder auch mit Teilchen 2 und 3 durchgeführt werden, erhält man analoge Resultate:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2(t) + \mu_{23}\vec{v}_3(t) &= \vec{L} \\ \vec{v}_3(t) + \mu_{31}\vec{v}_1(t) &= \vec{M} \ . \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\mu_{12}\,\mu_{23}\,\mu_{31} = 1 \ .$$

Schreibt man die durch dieses Prinzip geforderten, experimentell überprüfbaren Identitäten in der Form

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \mu_{12}\vec{v}_2 &= \quad \vec{K} \quad \equiv \quad \frac{1}{m_1}\vec{P}_{12} \\ \mu_{12}\vec{v}_2 + \frac{1}{\mu_{31}}\vec{v}_3 &= \mu_{12}\,\vec{L} \quad \equiv \quad \frac{1}{m_1}\vec{P}_{23} \\ \frac{1}{\mu_{31}}\vec{v}_3 + \vec{v}_1 &= \frac{1}{\mu_{31}}\vec{M} \quad \equiv \quad \frac{1}{m_1}\vec{P}_{31} \ , \end{aligned} \qquad (\textbf{III}.1.12)$$

so tritt die noch frei wählbare Größe $m_1 > 0$ lediglich als ein „Maßstabsfaktor“ auf. Setzt man dann $m_2 = m_1\mu_{12}$ und $m_3 = m_1\frac{1}{\mu_{31}}$, so erhält man die wohlvertrauten Beziehungen

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= \vec{P}_{12} \\ m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 &= \vec{P}_{23} \\ m_3\vec{v}_3 + m_1\vec{v}_1 &= \vec{P}_{31} \ . \end{aligned} \qquad (\textbf{III}.1.13)$$

Nach einmaliger Festlegung des „Normals“ m_1 werden die Teilchen somit durch skalare Größen m_j charakterisiert, die *nicht* von der Art der Wechselwirkung zwischen den Teilchen abhängen; diese Größen werden als *Massen* der Teilchen bezeichnet. Beachte, dass in die Formulierung von Prinzip 2 nur Größen eingehen, die schon *ohne* Festlegung der Bezugsmasse m_1 beobachtet werden können, nämlich die Verhältnisse $\mu_{12} = \frac{m_2}{m_1}$, $\mu_{31} = \frac{m_1}{m_3}$ und $\mu_{23} = \frac{1}{\mu_{12}\mu_{31}} = \frac{m_3}{m_2}$.
Die Größen $\vec{P}_{ij}$ werden als *Impulse* bezeichnet, genauer: als Gesamtimpulse des aus Teilchen i und Teilchen j bestehenden Systems; diese Impulse bleiben trotz der Wechselwirkung konstant. Die Ableitung des Systems (**III**.1.13) nach der Zeit liefert daher

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 &= \vec{0} \\ m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 &= \vec{0} \\ m_3\vec{a}_3 + m_1\vec{a}_1 &= \vec{0} \ . \end{aligned} \qquad (\textbf{III}.1.14)$$

Diese Gleichungen sind (bis auf die Festlegung des Massennormals) äquivalent zu denen, die bei der Formulierung von Prinzip 2 benutzt wurden. Sie beinhalten das dritte Newtonsche Axiom: *Definiert* man an dieser Stelle die Kraft $\vec{F}$ auf ein Teilchen der Masse m durch die Identität

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \,, \tag{**III**.1.15}$$

was genau dem zweiten Newtonschen Axiom entspricht, so wird man bei der Beschreibung des dem Prinzip 2 zugrunde liegenden Gedankenexperimentes auf Wechselwirkungskräfte $\vec{F}_{ij} = m_i\vec{a}_i$ geführt, die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübt werden; für diese Kräfte gilt

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \,. \tag{**III**.1.16}$$

III.2 Newtonsche Mechanik eines Punktteilchens

Bei der Beschreibung der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einfluss einer äußeren Kraft $\vec{F}$ stellt sich die Aufgabe, eine DGL der Form

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{**III**.2.1}$$

zu lösen, also eine DGL zweiter Ordnung für eine Vektorfunktion $\vec{r}(t)$. Als Anfangsbedingungen benötigt man dazu etwa die Position $\vec{r}(t_0)$ und die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t_0)$ zu einem Zeitpunkt t_0.
In der modernen Mechanik spielt zudem sie *Stabilität* der Lösungen eine wichtige Rolle: Betrachte zwei Trajektorien, die sich zum Zeitpunkt t_0 nur beliebig wenig unterscheiden,

$$\vec{r}_2(t_0) = \vec{r}_1(t_0) + \delta\vec{r}(t_0) \,; \tag{**III**.2.2}$$

weiterhin sei z.B. $\dot{\vec{r}}_1(t_0) = \dot{\vec{r}}_2(t_0)$. Dann stellt sich die Frage, wie sich $\delta\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$ im Laufe der Zeit entwickelt. Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichung (**III**.2.1) heißen *stabil*, falls $|\delta\vec{r}(t)|$ entweder gegen Null geht oder durch eine Konstante der Ordnung $\mathcal{O}(|\delta\vec{r}(t_0)|)$ beschränkt wird, und *instabil*, falls $|\delta\vec{r}(t)|$ ohne eine solche Schranke anwächst.
Die Größe

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{**III**.2.3}$$

ist der *Impuls* eines Teilchens der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt; damit ist die auf das Teilchen wirkende Kraft gleich der Ableitung seines Impulses:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{**III**.2.4}$$

Diese Form der Bewegungsgleichung gilt auch dann, wenn die Masse m nicht konstant ist. Bezeichnet nun Q den Ursprung des verwendeten Koordinatensystems, also denjenigen Punkt, von dem aus der Ortsvektor $\vec{r}$ eines Teilchens gemessen wird, so ist

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{**III**.2.5}$$

der *Drehimpuls* des Teilchens für die Bewegung um Q. Zur Angabe des Drehimpulses gehört also die Angabe des Bezugspunktes! Durch Ableiten nach der Zeit erhält man aus dieser Definition (**III**.2.5) sofort

$$\dot{\vec{L}} \;=\; \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \;=\; \vec{r} \times \vec{F}\;, \tag{**III**.2.6}$$

da ja $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{0}$. Man bezeichnet

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{**III**.2.7}$$

als das auf das Teilchen wirkende *Drehmoment* um den Punkt Q; es gilt daher

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}\;. \tag{**III**.2.8}$$

Wenn somit auf ein Teilchen kein Drehmonent wirkt, ist sein Drehimpuls „erhalten“, bleibt also im Laufe der Zeit konstant.
Falls nun die auf ein Teilchen wirkende Kraft $\vec{F}$ nur von der Zeit abhängt, ergibt sich die Trajektorie $\vec{r}(t)$ durch zweifache Integration:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\, \vec{F}(t'')\;. \tag{**III**.2.9}$$

Dieser Fall tritt jedoch in der Praxis so gut wie nie auf. Sehr häufig ist $\vec{F}$ dagegen eine Funktion nur des Ortes $\vec{r}$, *ohne* Abhängigkeit von $\dot{\vec{r}}$ und t. In einem solchen Fall $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ spricht man von einem *Kraftfeld*.
Wenn sich ein Teilchen in einem solchen Kraftfeld längs des Weges $\mathcal{C} : t \to \vec{r}(t)$ bewegt, wird an ihm von dem Kraftfeld die Arbeit

$$W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \tag{**III**.2.10}$$

verrichtet. Durch Einsetzen der Bewegungsgleichung erhält man dafür den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \;&=\; \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\; \dot{\vec{r}}(t') \cdot \vec{F}\big(\vec{r}(t')\big) \\
&=\; m \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\; \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t'} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{(\mathrm{d}t')^2} \\
&=\; \frac{1}{2} m \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t'} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t'} \right) \\
&=\; \frac{1}{2} m v^2(t) - \frac{1}{2} m v^2(t_0)\;.
\end{aligned} \tag{**III**.2.11}$$

Die Größe

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \tag{**III**.2.12}$$

ist die *kinetische Energie* eines Teilchens der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Die gewonnene Identität

$$W_{\mathcal{C}} = T(t) - T(t_0) \qquad (\textbf{III}.2.13)$$

besagt also, dass die bei der Bewegung längs des Weges $\mathcal{C}$ an dem Teilchen verrichtete Arbeit genau der Differenz seiner kinetischen Energie zwischen Anfangs- und Endpunkt entspricht. Von besonderer Wichtigkeit ist nun der Fall, dass die Arbeit $W_{\mathcal{C}}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges $\mathcal{C}$, nicht aber von dessen Verlauf dazwischen abhängt: Dann ist die an dem Teilchen verrichtete Arbeit für alle Wege zwischen zwei gegebenen Punkten gleich, so dass man nicht durch einen günstig gewählten Rückweg mehr Energie gewinnen kann, als für den Hinweg aufgebracht werden musste. Kraftfelder mit dieser Eigenschaft heißen *konservativ*.
Die Überlegungen, die in den Abschnitten **II**.4 und **II**.5 zur Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen über zweidimensionale Vektorfelder angestellt worden sind, lassen sich nun sofort auf den dreidimensionalen Fall übertragen. *(Übungsaufgabe!)* Das Kurvenintegral (**III**.2.10), also die von dem Kraftfeld entlang des Weges $\mathcal{C}$ an dem Teilchen verrichtete Arbeit, ist daher genau dann nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängig, wenn das Differential

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) \\ &= F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z \end{aligned} \qquad (\textbf{III}.2.14)$$

exakt ist, wenn also eine Stammfunktion existiert, deren partielle Ableitungen die Komponenten des Kraftvektors reproduzieren. In der Mechanik ist es üblich, eine solche Stammfunktion $-V(\vec{r})$ mit einem zusätzlichen Minuszeichen einzuführen, so dass

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \; ; \qquad (\textbf{III}.2.15)$$

die negative Stammfunktion $V = V(\vec{r})$ wird als *Potential* bezeichnet. An dieser Stelle bietet es sich an, eine bequeme Kurzschreibweise einzuführen: Man definiert den *Nabla-Operator*

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \; , \qquad (\textbf{III}.2.16)$$

also einen vektorwertigen Differentialoperator, der einer skalaren Funktion $V(\vec{r})$ das Vektorfeld

$$\vec{\nabla}V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (\textbf{III}.2.17)$$

zuordnet. Dieses Vektorfeld wird als der *Gradient* von V bezeichnet, kurz: $\vec{\nabla}V = \text{grad}\, V$. Sehr häufig schreibt man auch einfach

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} \, , \tag{**III**.2.18}$$

so dass

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \tag{**III**.2.19}$$

und

$$\text{grad}\, V \;=\; \vec{\nabla}V \;=\; \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix} \, . \tag{**III**.2.20}$$

Damit lässt sich nun eine zentrale Aussage formulieren:

> *Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist genau dann konservativ, wenn eine skalare Funktion $V(\vec{r})$ existiert mit der Eigenschaft, dass*
>
> $$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \, ;$$
>
> *diese Funktion $V(\vec{r})$ wird als Potential bezeichnet.*

Für die von einem konservativen Kraftfeld verrichtete Arbeit gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{C}} &= \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\ &= -\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{\nabla}V(\vec{r}) \\ &= -\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} \mathrm{d}V(\vec{r}) \\ &= -V(\vec{r})\Big|_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} \\ &= -V\big(\vec{r}(t)\big) + V\big(\vec{r}(t_0)\big) \, . \end{aligned} \tag{**III**.2.21}$$

Damit erhält die vorherige Gleichung (**III**.2.11) nun die folgende Form:

$$\frac{1}{2}mv^2(t) + V\big(\vec{r}(t)\big) = \frac{1}{2}mv^2(t_0) + V\big(\vec{r}(t_0)\big) \, . \tag{**III**.2.22}$$

Das Potential $V(\vec{r})$ wird einem Raumpunkt $\vec{r}$ zugeordnet, ganz unabhängig davon, ob sich dort ein Teilchen befindet oder nicht. Wenn sich jedoch ein Teilchen länges einer Trajektorie $\vec{r}(t)$ in einem solchen „Potentialfeld“ bewegt, so wird $V\big(\vec{r}(t)\big)$ als die *potentielle Energie* des Teilchens bezeichnet. Die soeben gewonnene Identität (**III**.2.22) drückt daher der Erhaltung der gesamten mechanischen Energie aus:

Bewegt sich ein Teilchen in einem konservativen Kraftfeld, so ist die Summe aus seiner kinetischen und seiner potentiellen Energie konstant.

Nachdem somit die Äquivalenz der Wegunabhängigkeit der Arbeit und der Existenz einer Potentialfunktion festgestellt wurde, bleibt noch eine wesentliche Frage: Wie kann man einem gegebenen Kraftfeld ansehen, ob es ein Potential besitzt, ob es also konservativ ist? Eine *notwendige* Bedingung dafür lässt sich sofort erkennen: Wenn nämlich ein Potential existiert, gilt für dessen totales Differential die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= -F_x\mathrm{d}x - F_y\mathrm{d}y - F_z\mathrm{d}z\,. \end{aligned} \qquad (\mathbf{III}.2.23)$$

Sofern $V = V(\vec{r})$ mindestens zweimal differenzierbar ist, hat man daher aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen die drei Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}\,; \end{aligned} \qquad (\mathbf{III}.2.24)$$

an die Stelle der einen Integrabilitätsbedingung (**II**.5.12) für die Integration über zweidimensionale Vektorfelder treten also nun drei solcher Bedingungen. Diese drei Bedingungen lassen sich erneut mit Hilfe des Nabla-Operators (**III**.2.16) in bequemer Weise zusammenfassen: Definiert man die *Rotation* eines Vektorfeldes $\vec{F}$ durch das Kreuzprodukt

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y F_z - \partial_z F_y\\ \partial_z F_x - \partial_x F_z\\ \partial_x F_y - \partial_y F_x\end{pmatrix}\,, \qquad (\mathbf{III}.2.25)$$

so sind die drei Bedingingen (**III**.2.24) äquivalent zu den Komponenten der Gleichung

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}\,. \qquad (\mathbf{III}.2.26)$$

Überaus bemerkenswert ist nun, dass diese Integrabilitätsbedingung $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$ sogar *hinreichend* ist für die Existenz einer Stamm- bzw. Potentialfunktion, sofern das dreidimensionale Gebiet, auf dem das Kraftfeld $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ definiert ist, *einfach zusammenhängend* ist; der Beweis dieser Aussage ist eine genaue Kopie desjenigen, der bereits in Abschnitt **II**.5 für zweidimensionale Vektorfelder geführt wurde. Damit kann nun auch die entscheidende Charakterisierung konservativer Kraftfelder angegeben werden:

Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ besitzt genau dann ein Potential, wenn es auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist und seine Rotation verschwindet,

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}\,.$$

Der „Gradient“ eines skalaren Feldes und die „Rotation“ eines Vektorfeldes traten in diesem Abschnitt in erster Linie als bequeme Abkürzungen auf. In einem späteren Kapitel dieser Vorlesung über Vektoranalysis wird jedoch deutlich werden, dass „grad“ und „rot“, noch ergänzt um die weitere Operation „div“, eine noch viel tiefergehende Bedeutung haben.

III.3 Eindimensionale Bewegungen

Für die Bewegung in einem zwei- oder dreidimensionalen Kraftfeld ist die dabei auftretende Integrabilitätsbedingung nichttrivial; nicht jedes Kraftfeld ist konservativ. Für eine Bewegung, die auf eine Raumdimension eingeschränkt ist, die also nur einen „Freiheitsgrad“ besitzt, ist das anders: Angenommen, ein Teilchen der Masse m kann sich nur längs der x-Achse bewegen; seine Trajektorie ist also eine Funktion $x = x(t)$. Multipliziert man nun die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{**III**.3.1}$$

mit der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$, hat man

$$m\dot{x}\ddot{x} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \;=\; F(x)\dot{x}\;. \tag{**III**.3.2}$$

Ist nun weiter

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, F(x') \tag{**III**.3.3}$$

eine negative Stammfunktion von F, so gilt

$$F\big(x(t)\big)\dot{x}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V\big(x(t)\big)\;. \tag{**III**.3.4}$$

Damit wird die Gleichung (**III**.3.2) zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)\right) = 0 \tag{**III**.3.5}$$

oder

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E\;, \tag{**III**.3.6}$$

wobei natürlich „x“ als „$x(t)$“ zu lesen ist. Daher bleibt die Summe aus der kinetischen und der potentiellen Energie des Teilchens bei seiner Bewegung konstant; die Gesamtenergie E tritt in Gleichung (**III**.3.6) als Integrationskonstante auf. Die Tatsache, dass mit der Energie E ein „erstes Integral“ der Bewegungsgleichung zur Verfügung steht, lässt sich nun ausnutzen, um für eindimensionale Bewegungen die Bahnkurve $x(t)$ durch die Lösung einer DGL lediglich *erster* Ordnung zu bestimmen: Aus

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2}{m}\big(E - V(x)\big) \tag{**III**.3.7}$$

Abbildung **III**.1: Zur qualitativen Diskussion der eindimensionalen Bewegung eines Massenpunktes mit verschiedenen Energien E_i. Für $E = E_1$ ist $x = x_5$ ein stabiler Fixpunkt; für $E = E_3$ ist $x = x_3$ ein instabiler Fixpunkt.

folgt durch Trennung der Variablen

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(t_0)}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{E - V(x')}} \; . \tag{**III**.3.8}$$

Selbst wenn das Integral auf der der rechten Seite nicht auf bekannte Funktionen zurückgeführt werden kann, kann es numerisch gelöst werden; die Umkehrung der so gefundenen Funktion $t = t(x)$ liefert die gesuchte Trajektorie des Teilchens.
Selbst in den Fällen, in denen das Integral (**III**.3.8) nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann, ist es sehr einfach, qualitative Informationen über die Bewegung zu erhalten. Da die kinetische Energie nicht negativ werden kann, kann sich das Teilchen nur in Bereichen aufhalten, in denen $E \geq V(x)$ gilt. Punkte x_0 mit $E = V(x_0)$ sind *Umkehrpunkte*, sofern V bei x_0 kein lokales Maximum oder Minimun annimmt. Trägt man also $V(x)$ über x auf und gibt die Energie E vor, so sind die „erlaubten Bereiche“ sehr leicht zu identifizieren. Etwa in Abbildung **III**.1 sei $V(x) = 0$ für $x \leq 0$. Man hat dann für $E = E_1$ einen Umkehrpunkt bei $x = x_1$, einen *stabilen Fixpunkt* bei $x = x_5$ und einen weiteren Umkehrpunkt bei $x = x_8$: In dieser Situation kann das Teilchen, aus dem Unendlichen kommend, auf den „Potentialberg“ zulaufen und wird daran reflektiert. Für $E = E_2$ hat man einen ähnlichen Umkehrpunkt bei x_2; befindet sich das Teilchen zwischen den Umkehrpunkten x_4 und x_6, so führt es *stabile Oszillationen* aus. Für $E = E_3$ hat man einen *instabilen Fixpunkt* bei x_3. Befindet sich ein Teilchen mit der Energie $E = E_3$ z.B. bei x_5 und bewegt sich nach rechts, so wird es wie bekannt bei x_7 am „großen“ Potentialberg reflektiert und läuft dann auf den instabilen Fixpunkt zu. Um nicht in Konflikt mit dem Eindeutigkeitssatz zu geraten, kann es diesen aber nie erreichen, muss also bei Annäherung an den instabilen Fixpunkt „unendlich langsam“ werden. Lösungen der Bewegungsgleichung, die in der Nähe des instabilen Fixpunktes starten, können sich im Laufe der Zeit beliebig weit voneinander entfernen, sind also instabil im Sinne der vorherigen Definition.

■ **Beispiel:** Der harmonische Oszillator.

Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0; Lösungen sind die Oszillationen

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

mit Amplitude A und Phasenwinkel φ. Ein Teilchen der Masse m, das eine solche Schwingung ausführt, unterliegt also einer linear mit der Auslenkung wachsenden Rückstellkraft

$$F(x) = -m\omega_0^2 x \ .$$

Das zugehörige Potential lautet daher

$$\begin{aligned} V(x) &= +m\omega_0^2 \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\, x' \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \ . \end{aligned}$$

Jede Wahl der unteren Grenze x_0 führt auf das gleiche Kraftgesetz $F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$; die Wahl von x_0 entspricht lediglich der Festlegung des „Nullniveaus“ des Potentials. Setzt man $x_0 = 0$, erhält man das Potential des harmonischen Oszillators in der häufig benutzten Form

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \ .$$

Bei gegebener Energie E des Oszillators hat man nun

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \ ,$$

also

$$\dot{x}^2 = \omega_0^2 \left(\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2 \right) \ .$$

Das liefert nach dem Muster von Gleichung (**III**.3.8) sofort

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x'^2}} = \omega_0 (t - t_0) \ ;$$

mit $x_0 = 0$ also weiter

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2E}}\, x \right) = \omega_0 (t - t_0)$$

Abbildung **III**.2: Die möglichen Bewegungen eines harmonischen Oszillators werden im Phasenraum durch eine Schar konzentrischer Ellipsen beschrieben. Die Ruhelage des Oszillators ist hier sofort als ein stabiler Fixpunkt zu erkennen.

oder schließlich

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin\big(\omega_0(t - t_0)\big) \ .$$

Die Schwingungsamplitude entspricht dem positiven Umkehrpunkt: An den Umkehrpunkten $\pm x_U$ ist $\dot{x}_U = 0$, also hat man

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_U^2$$

oder

$$x_U = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \ ;$$

das ist genau die Amplitude der durch $x(t)$ beschriebenen Oszillation. ■

Anstatt, wie im Beispiel der Abbildung **III**.1, die Bewegung nur mit Hilfe der Potentiallandschaft zu diskutieren, stellt man sie häufig im *Phasenraum* dar, der von Ort und Impuls aufgespannt wird. Etwa für den harmonischen Oszillator hat man dann mit $p = m\dot{x}$ die Energiegleichung

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \qquad (\textbf{III}.3.9)$$

oder

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega_0^2}} = 1 \ . \qquad (\textbf{III}.3.10)$$

Abbildung **III**.3: Das Phasenraumportrait für die Bewegung in einem Cosinus-Gitter. Die geschlossenen Kurven, die stabile Oszillationen innerhalb der einzelnen Potentialmulden beschreiben, werden durch eine Separatrix von denjenigen Kurven getrennt, die zu unbeschränkten Bewegungen auf dem Gitter gehören; diese Separatrix verbindet die instabilen Fixpunkte.

Das ist die Gleichung einer *Ellipse* mit den Halbachsen $\Delta p = \sqrt{2mE}$ und $\Delta x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}$, also mit dem Flächeninhalt

$$\pi \Delta x \Delta p = 2\pi \frac{E}{\omega_0} \; . \tag{**III**.3.11}$$

Die vorgegebene Gesamtenergie legt somit fest, auf welcher Ellipse sich der Systempunkt im Phasenraum bewegt.
Als weiteres Beispiel soll noch das Phasenraumportrait für die Bewegung in dem periodischen Potential

$$V(x) = -V_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) \tag{**III**.3.12}$$

untersucht werden: Ausgangspunkt ist erneut die Energiegleichung

$$E = \frac{p^2}{2m} - V_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) \; . \tag{**III**.3.13}$$

Hier sind nun drei wesentlich voneinander verschiedene Fälle zu erkennen:

(i) Für $-V_0 < E < V_0$ findet man stabile Oszillationen innerhalb der einzelnen Potentialmulden; für $E = -V_0$ ruht das Teilchen in einem Potentialminimum.

(ii) Für $E > V_0$ hat man eine unbeschränkte Bewegung ohne Umkehrpunkte über das gesamte Gitter.

(iii) Für $E = V_0$ ruht das Teilchen in einem der instabilen Fixpunkte oder es bewegt sich auf einen dieser Fixpunkte zu, ohne jemals dort anzukommen. Die entsprechende „Trennkurve“ zwischen den Bewegungsformen (i) und (ii) im Phasenraumportrait wird als *Separatrix* bezeichnet.

III.4 Bewegung im Zentralkraftfeld

Ein Potential $V(r)$, das in sphärischen Polarkoordinaten *nur* vom Abstand r des betrachteten Punktes vom Koordinatenursprung (dem „Kraftzentrum“), nicht aber von den Polarwinkeln ϑ und φ abhängt und somit *radialsymmetrisch* ist, führt auf ein Kraftfeld

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}V(r) \\ &= -V'(r)\,\vec{\nabla}r \\ &= -V'(r)\,\vec{e}_r\,, \end{aligned} \tag{**III**.4.1}$$

da ja

$$\vec{\nabla}r \;=\; \frac{1}{r}\vec{r} \;=\; \vec{e}_r \tag{**III**.4.2}$$

der radiale Einheitsvektor ist. Die „Kraftlinien“ weisen daher entweder radial nach innen oder radial nach außen, je nachdem, ob die Kraft attraktiv oder repulsiv ist. Man spricht dann von einem *Zentralkraftfeld*.
Das Drehmoment um den Ursprung, das von einer solchen Zentralkraft herrührt, ist

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}\times\vec{F} \\ &= r\vec{e}_r \times \big(-V'(r)\,\vec{e}_r\big) \\ &= \vec{0}\,. \end{aligned} \tag{**III**.4.3}$$

Da nun $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$, folgt sofort ein *Erhaltungssatz*:

> *In einem Zentralkraftfeld ist der Drehimpuls der Bewegung um das Kraftzentrum erhalten.*

Da weiterhin $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ und sowohl der Betrag als auch die *Richtung* von $\vec{L}$ konstant ist, verläuft die Bewegung eines Teilchens in einem Zentralkraftfeld lediglich in einer *Ebene*, auf der $\vec{L}$ senkrecht steht. Zweckmäßigerweise führt man in dieser Ebene Polarkoordinaten mit dem Kraftzentrum als Ursprung ein:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{**III**.4.4}$$

Für die Ableitungen des Ortsvektors nach den Koordinaten ergibt sich daraus sofort

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \;=\; \vec{e}_r \tag{**III**.4.5}$$

und

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} \;=\; \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \;=\; r\vec{e}_\varphi\,. \tag{**III**.4.6}$$

Die beiden zueinander orthogonalen lokalen Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ stehen senkrecht auf den Koordinatenlinien $r = const.$ bzw. $\varphi = const.$; es gelten die Beziehungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\vec{e}_r = \vec{e}_\varphi \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r \; . \tag{**III**.4.7}$$

Die Bewegung des Teilchens in der Bahnebene kann nun durch eine Parameterdarstellung $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ beschrieben werden. Da die Kraft nur eine Komponente in Richtung von $\vec{e}_r$, aber keine in Richtung von $\vec{e}_\varphi$ besitzt, ist es sinnvoll, die Bewegungsgleichung in eine *radiale* und eine *azimutale* Komponente zu zerlegen: Aus

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \tag{**III**.4.8}$$

folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \; . \end{aligned} \tag{**III**.4.9}$$

Da nun $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ aufeinander senkrecht stehen, hat man

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \; ; \tag{**III**.4.10}$$

die Energie des Teilchens, ausgedrückt in ebenen Polarkoordinaten, lautet also

$$E = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\big) + V(r) \; . \tag{**III**.4.11}$$

Weitere Differentiation der Gleichung (**III**.4.9) liefert

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r \\ &= \big(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\big)\vec{e}_r + \big(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\big)\vec{e}_\varphi \; . \end{aligned} \tag{**III**.4.12}$$

Die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = -V'(r)\,\vec{e}_r \tag{**III**.4.13}$$

führt daher auf die beiden Gleichungen

$$m\big(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\big) = -V'(r) \tag{**III**.4.14}$$

und

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \; . \tag{**III**.4.15}$$

Die durch diese zweite Gleichung (**III**.4.15) ausgedrückte Tatsache, dass die Kraft keine Azimutalkomponente besitzt (die allein ja ein Drehmoment ausüben könnte), hängt unmittelbar mit der Erhaltung des Drehimpulses zusammmen: Es gilt ja

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p} \\ &= r\vec{e}_r \times m\big(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\big) \\ &= mr^2\dot{\varphi}\;\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi \\ &= mr^2\dot{\varphi}\;\vec{e}_z \; , \end{aligned} \tag{**III**.4.16}$$

wobei hier die z-Achse senkrecht zur Bahnebene steht. Bisher wurde nur die Konstanz der *Richtung* von $\vec{L}$ ausgenutzt, um die Orientierung der Bahnebene festzulegen. Aus der Konstanz des Betrages von $\vec{L}$ folgt nun weiter

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\vec{L}| &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} mr^2\dot{\varphi} \\ &= m\big(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}\big) \\ &= 0\,; \end{aligned} \tag{III.4.17}$$

das ist äquivalent zu der Gleichung (**III**.4.15). Die Tatsache, dass für die Bewegung in Zentralkraftfeldern neben der Gesamtenergie E mit $L = |\vec{L}|$ noch eine weitere „Konstante der Bewegung“ existiert, lässt sich nun zur Integration der Bewegungsgleichung (**III**.4.14) ausnutzen: Mit

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \tag{III.4.18}$$

lässt sich $\dot{\varphi}$ daraus zugunsten von r eliminieren, und man erhält

$$m\ddot{r} = -V'(r) + \frac{L^2}{mr^3}\,. \tag{III.4.19}$$

Diese nur noch eindimensionale (!) Bewegungsgleichung lässt sich nun wieder mit dem Trick integrieren, der bereits zu dem Ausdruck (**III**.3.8) geführt hat: Multiplikation mit $\dot{r}$ liefert

$$\begin{aligned} m\dot{r}\ddot{r} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \\ &= -V'(r)\dot{r} + \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)\,, \end{aligned} \tag{III.4.20}$$

so dass

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}\right)\,. \tag{III.4.21}$$

Die zugehörige Integrationskonstante stimmt wieder mit der erhaltenen Gesamtenergie der Bewegung überein. Setzt man nämlich die Beziehung (**III**.4.18) für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ in die Energiegleichung (**III**.4.11) ein, findet man sofort

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\,. \tag{III.4.22}$$

Von hier aus ergibt sich ein systematisches Verfahren zur Bestimmung der Bahnkurven: Durch Trennung der Variablen erhält man zunächst die Radialfunktion $r(t)$, aus deren Kenntnis man in einem zweiten Schritt mit Hilfe der Beziehung (**III**.4.18) auch die Azimutalfunktion $\varphi(t)$ berechnen kann.

Abbildung **III**.4: Die Bewegung in dem Potential $V(r) = -c/r^\alpha$ mit $c > 0$ und $0 < \alpha < 2$ wird für kleine r durch die repulsive Drehimpulsbarriere dominiert. Für $E < 0$ stürzt das Teilchen daher nicht in das Kraftzentrum, sondern oszilliert zwischen zwei Radien $r_{\min}$ und $r_{\max}$ hin und her.

Es ist instruktiv, die Philosophie dieses Lösungsverfahrens zu durchdenken: Zunächst hat man die Bewegung in einer Ebene zu beschreiben, also ein Problem mit *zwei* Freiheitsgraden zu lösen. Die Existenz einer Erhaltungsgröße, nämlich des Drehimpulses L, erlaubt es jedoch, dieses Problem auf ein einfacheres mit nur noch *einem* Freiheitsgrad zurückzuführen, nämlich auf die Bestimmung der Radialfunktion $r(t)$ aus der Energiegleichung (**III**.4.22). Diese Gleichung beschreibt nun analog zu Gleichung (**III**.3.6) die *eindimensionale* Bewegung eines Teilchens der Masse m in dem *effektiven Potential*

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \; ; \tag{**III**.4.23}$$

dieses effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ unterscheidet sich von dem ursprünglichen Potential $V(r)$ um die so genannte *Drehimpulsbarriere*

$$V_L(r) = \frac{L^2}{2mr^2} \; . \tag{**III**.4.24}$$

Für die Bewegung in der Ebene repräsentiert dieser Term die azimutale *kinetische* Energie; für das eindimensionale „Ersatzproblem“ ist er dagegen als Bestandteil des Potentials aufzufassen. Hat man nun z.B. ein Potential $V(r) = -c/r^\alpha$ mit einer positiven Konstanten c und einem reellen Exponenten $0 < \alpha < 2$, so wird V_{eff} für kleine r von der repulsiven Drehimpulsbarriere, für große r dagegen von dem attraktiven „eigentlichen“ Potential dominiert: Wie die Abbildung **III**.4 verdeutlicht, führt das Teilchen daher bei einer gegebenen Gesamtenergie $E < 0$ *Oszillationen* in der Radialkoordinate r zwischen einem „Innenradius“ $r_{\min}$ und einem „Außenradius“ $r_{\max}$ durch. Da gleichzeitig die Winkelkoordinate φ in der Zeit fortschreitet, führt das zu Rosettenbahnen um das Kraftzentrum, die im allgemeinen (d.h. für fast alle $0 < \alpha < 2$) *nicht* in sich geschlossen sind. Ist dagegen $\alpha > 2$, ist die Drehimpulsbarriere nicht in der Lage, den Sturz in das Kraftzentrum zu verhindern.

Die genaue Gestalt der Bahnkurven lässt sich nun wie folgt bestimmen: Aus der Energiegleichung (**III**.4.22) erhält man

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}\,, \tag{III.4.25}$$

also gilt eine Beziehung

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}\right)}} \tag{III.4.26}$$

mit geeigneter Anfangsbedingung $r_0 = r(t_0)$. Umkehrung dieser Beziehung $t = t(r)$ liefert die radiale Abstandsfunktion $r = r(t)$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi &= \frac{L}{mr^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{L}{mr^2}\frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}}\,, \end{aligned} \tag{III.4.27}$$

so dass

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{L\,\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{2m\left(E - V(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}\right)}}\,. \tag{III.4.28}$$

Umkehrung dieser Beziehung $\varphi = \varphi(r)$ liefert schließlich die Abstands-Winkelfunktion $r = r(\varphi)$.

III.4.1 Das Kepler-Problem

Von ganz besonderem Interesse ist die Bestimmung der Bahnkurven für das *Gravitationspotential*, das eine Masse m aufgrund einer anderen, im Ursprung ruhenden Masse M erfährt:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{III.4.29}$$

mit der bekannten Gravitationskonstanten $G = 6.672 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$. Dieses Potential führt auf die Newtonsche Gravitationskraft

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}V(r) \\ &= -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,; \end{aligned} \tag{III.4.30}$$

die Aufgabe, für diese Kraft die Lösungen der Bewegungsgleichung zu finden, wird auch als *Kepler-Problem* bezeichnet.[5] Man geht dazu aus von der Energiegleichung

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \tag{III.4.31}$$

[5] *Nach Wikipedia:* Johannes Kepler (lateinisch Ioannes Keplerus, auch Keppler; geb. am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt; gest. am 15. November 1630 in Regensburg) war ein deutscher Naturphilosoph,

und macht die Substitution

$$s = \frac{1}{r} \,, \tag{**III**.4.32}$$

die speziell im Fall eines „$1/r$-Potentials“ einen deutlich einfacheren Lösungsweg eröffnet als das auf den Gleichungen (**III**.4.26) und (**III**.4.28) beruhende Standardverfahren. Betrachtet man diesen inversen Radialabstand in Abhängigkeit vom Winkel φ, hat man

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi} \\ &= -\frac{1}{r^2}\dot{r}\,\frac{1}{\dot{\varphi}} \,; \end{aligned} \tag{**III**.4.33}$$

mit $L = mr^2\dot{\varphi}$ also weiter

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} &= -\frac{\dot{r}}{r^2}\,\frac{mr^2}{L} \\ &= -\frac{m}{L}\,\dot{r} \,, \end{aligned} \tag{**III**.4.34}$$

so dass

$$\dot{r} = -\frac{L}{m}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} \,. \tag{**III**.4.35}$$

Einsetzen in die Energiegleichung (**III**.4.31) liefert unter Verwendung der Notation

$$V(1/s) \;\equiv\; \bar{V}(s) \;=\; -GMms \tag{**III**.4.36}$$

die Identität

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\frac{L^2}{m^2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}s^2 + \bar{V}(s) \\ &= \frac{L^2}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + s^2\right] + \bar{V}(s) \,; \end{aligned} \tag{**III**.4.37}$$

Differentiation nach φ ergibt dann

$$0 = \frac{L^2}{2m}\left[2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\varphi^2} + 2s\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right] + \frac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} \tag{**III**.4.38}$$

Mathematiker, Astronom, Astrologe, Optiker und evangelischer Theologe. Johannes Kepler entdeckte die Gesetzmäßigkeiten, nach denen sich Planeten um die Sonne bewegen. Sie werden nach ihm *Keplersche Gesetze* genannt. Er machte die Optik zum Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchung und bestätigte die Entdeckungen, die sein Zeitgenosse Galileo Galilei mit dem Teleskop gemacht hatte. Kepler zählt damit zu den Begründern der modernen Naturwissenschaften. Mit seiner Einführung in das Rechnen mit Logarithmen trug Kepler zur Verbreitung dieser Rechenart bei. In der Mathematik wurde ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Integralen nach ihm *Keplersche Fassregel* benannt.

oder schließlich

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\varphi^2} + s = -\frac{m}{L^2}\,\frac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}s}\;. \tag{**III**.4.39}$$

Diese inhomogene lineare DGL gilt sogar für *jedes* Potential. Für das Gravitationspotential (**III**.4.36) wird sie jedoch besonders einfach:

$$-\frac{m}{L^2}\,\frac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}s} \;=\; \frac{GMm^2}{L^2} \;=\; const. \tag{**III**.4.40}$$

Damit wird die Gleichung (**III**.4.39) die DGL eines harmonischen Oszillators (!) unter dem Einfluss einer äußeren Kraft, die als Inhomogenität auftritt. Die Aussage, die in Abschnitt **II**.2 über die Lösungsmenge einer inhomogenen linearen DGL erster Ordnung gemacht wurde, gilt auch hier: Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer speziellen Lösung der vollen inhomogenen DGL. Die allgemeine Lösung der homogenen Oszillatorgleichung lautet

$$s_{\mathrm{h}}(\varphi) = A\sin\varphi + B\cos\varphi \tag{**III**.4.41}$$

mit zwei noch freien Konstanten A und B; eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL erkennt man sofort:

$$s_{\mathrm{i}}(\varphi) = \frac{GMm^2}{L^2}\;. \tag{**III**.4.42}$$

Damit hat man insgesamt

$$s(\varphi) = A\sin\varphi + B\cos\varphi + \frac{GMm^2}{L^2}\;. \tag{**III**.4.43}$$

Die Parameter A und B werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Fordert man, dass der Winkel $\varphi = 0$ zum *minimalen Abstand* vom Kraftzentrum gehört, dass also $\varphi = 0$, wenn $s = 1/r$ maximal wird, hat man

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=0} &= \big(A\cos\varphi - B\sin\varphi\big)_{\varphi=0} \\ &= A\end{aligned} \tag{**III**.4.44}$$

sowie

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=0} &= \big(-A\sin\varphi - B\cos\varphi\big)_{\varphi=0} \\ &= -B\end{aligned} \tag{**III**.4.45}$$

und daher $A = 0$ und $B > 0$. Die Bahnkurve eines „Teilchens“ im Gravitationspotential wird dann beschrieben durch die Gleichung

$$s(\varphi) \;=\; \frac{1}{r(\varphi)} \;=\; B\cos\varphi + \frac{GMm^2}{L^2}\;. \tag{**III**.4.46}$$

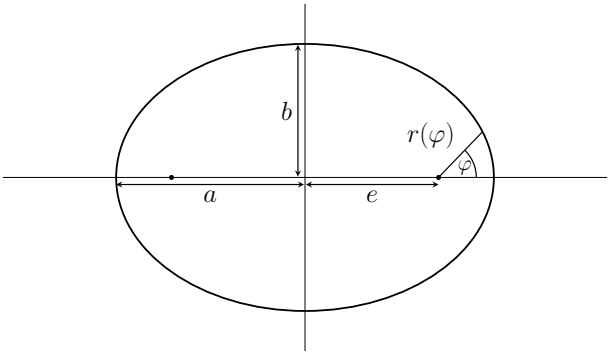

Abbildung **III**.5: Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Entfernungen von zwei „Brennpunkten“ konstant ist. Für die große Halbache a, die kleine Halbachse b und die numerische Exzentrizität e gilt daher die Beziehung $a^2 = b^2 + e^2$.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} k &= \frac{L^2}{GMm^2} \\ \varepsilon &= kB \end{aligned} \qquad (\textbf{III}.4.47)$$

ist das genau die Standardform der Gleichung eines *Kegelschnittes* in ebenen Polarkoordinaten, nämlich

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{1}{k}(1 + \varepsilon \cos\varphi) \; . \qquad (\textbf{III}.4.48)$$

Der Typ des Schnittes wird dabei durch die Exzentrizität ε bestimmt:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0 \quad \text{ergibt einen Kreis,} \\ 0 < \varepsilon &< 1 \quad \text{eine Ellipse,} \\ \varepsilon &= 1 \quad \text{eine Parabel,} \\ \varepsilon &> 1 \quad \text{eine Hyperbel.} \end{aligned}$$

Die Bahnen *gebundener* Bewegungen im $1/r$-Potential, also von Bewegungen mit negativer Energie, deren Abstand vom Kraftzentrum wie in Abbildung **III**.4 oszilliert, haben daher die Form einer *Ellipse* (mit der Kreisbahn als Sonderfall) und sind damit insbesondere in sich geschlossen, im Unterschied zu den Bahnen in allgemeinen Zentralkraftfeldern. Anstelle der Parameter k und ε verwendet man zur Charakterisierung einer Ellipse auch ihre große Halbachse a und ihre kleine Halbachse b, wie in Abbildung **III**.5 dargestellt. Man nennt den Abstand $e = \varepsilon a$ eines ihrer Brennpunkte vom Mittelpunkt die numerische Exzentrizität.
Aus der „Gärtnerkonstruktion“ (also aus der Tatsache, dass für jeden Punkt auf der Ellipse die Summe seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten konstant ist) folgt sofort, dass

$$2a = 2\sqrt{b^2 + e^2} \; , \qquad (\textbf{III}.4.49)$$

also

$$a^2 = b^2 + e^2 \; . \tag{III.4.50}$$

Da der „Halbparameter“ k nach der Kegelschnittgleichung (**III**.4.48) mit $r(\pi/2)$ übereinstimmt, erhält man ebenso

$$2a = k + \sqrt{4e^2 + k^2} \; , \tag{III.4.51}$$

und daraus

$$k = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} \; . \tag{III.4.52}$$

Eine erste Gleichung zur Bestimmung der Halbachsen für die gebundene Bewegung im $1/r$-Potential ergibt sich aus der Energieerhaltung: Da $r(\varphi)$ vereinbarungsgemäß für $\varphi = 0$ minimal wird, ist $\dot{r}(\varphi = 0) = 0$; außerdem gilt für den Bahnpunkt $r(\varphi = 0) = r_0$ die Beziehung

$$r_0 = \frac{k}{1+\varepsilon} = a - e \; . \tag{III.4.53}$$

Die erhaltene Gesamtenergie (**III**.4.37) hat daher den Wert

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= GMm \left(\frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0} \right) \; , \end{aligned} \tag{III.4.54}$$

wobei im zweiten Schritt die erste der beiden Gleichungen (**III**.4.47) für den Parameter k benutzt wurde. Da nun weiterhin

$$\begin{aligned} \frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0} &= \frac{(a^2 - e^2)/a}{2(a-e)^2} - \frac{1}{a-e} \\ &= \frac{a^2 - e^2 - 2a(a-e)}{2a(a-e)^2} \\ &= \frac{-a^2 + 2ae - e^2}{2a(a-e)^2} \\ &= -\frac{1}{2a} \; , \end{aligned} \tag{III.4.55}$$

findet man schließlich

$$E = -\frac{GMm}{2a} < 0 \; , \tag{III.4.56}$$

so dass die große Halbachse durch die (negative) Energie festgelegt wird:

$$a = -\frac{GMm}{2E} \; . \tag{III.4.57}$$

Die kleine Halbachse wird dagegen auch durch den Drehimpuls bestimmt: Mit Hilfe der Beziehung (**III**.4.52) ergibt sich

$$\begin{aligned} b^2 &= ka \\ &= \frac{L^2}{GMm^2}\left(\frac{-GMm}{2E}\right) \\ &= \frac{L^2}{2m(-E)}\,, \end{aligned} \tag{III.4.58}$$

also

$$b = \frac{L}{\sqrt{2m(-E)}}\,. \tag{III.4.59}$$

Vor dem Hintergrund dieser Lösung des Kepler-Problems für „gebundene“ Bewegungen im Gravitationspotential lassen sich nun die *Keplerschen Gesetze* für die Bewegung der Planeten um die Sonne auch in ihrer ursprünglichen Formulierung leicht verstehen:

(i) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

(ii) Der von der Sonne zum Planeten gezogene „Fahrstrahl“ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

(iii) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Ellipsen.

Dabei geht in das erste Gesetz ein, dass die Masse der Sonne wesentlich größer ist als die der Planeten und damit der gemeinsame Schwerpunkt der Sonne und des betrachteten Planeten sogar noch in das Sonneninnere fällt. Im allgemeinen Fall muss das „Zweikörperproblem“ dagegen erst auf ein äquivalentes Einkörperproblem mit einem feststehenden Kraftzentrum zurückgeführt werden. Das zweite Gesetz drückt die Drehimpulserhaltung aus: Bewegt sich der „Fahrstrahl“ in der Zeit $\mathrm{d}t$ von $\vec{r}$ nach $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$, so ist die dabei überstrichene (orientierte) Fläche $\mathrm{d}\vec{A}$ gegeben durch[6]

$$\mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r}\,; \tag{III.4.60}$$

die „Flächengeschwindigkeit“ ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}\,\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{2m}\vec{L}\,. \end{aligned} \tag{III.4.61}$$

Dieses zweite Keplersche Gesetz gilt also nicht nur für die Bewegung im $1/r$-Potential, sondern für gebundene Bewegung in *jedem* Zentralpotential. Daraus, und aus den bekannten

[6] Übrigens: „Fahrstrahl“ ist die Übersetzung des lateinischen Wortes „Vektor“.

Beziehungen zwischen den Parametern der Bahnellipsen, erhält man das mystisch anmutende dritte Gesetz: Ist T die Umlaufzeit eines Planeten der Masse m, so ist

$$\pi ab = T\frac{L}{2m}\ , \tag{**III**.4.62}$$

also folgt

$$\begin{aligned}\frac{T^2}{a^3} &= \frac{(\pi ab)^2 4m^2/L^2}{a^3}\\ &= \frac{4m^2\pi^2 k}{L^2}\\ &= \frac{4\pi^2}{GM}\ ,\end{aligned} \tag{**III**.4.63}$$

wobei im zweiten und dritten Schritt die Identität

$$\frac{b^2}{a} \;=\; k \;=\; \frac{L^2}{GMm^2}$$

benutzt wurde. Von entscheidender Bedeutung ist hier, dass der Quotient am Ende der Umformung (**III**.4.63) nur von der Masse M des Zentralgestirns, *nicht* aber von der Masse m des Planeten oder dessen Energie und Drehimpuls abhängt und somit für alle Planeten identisch ist.

III.4.2 Streuung

Es bleiben noch die Lösungen der Bewegungsgleichung für das $1/r$-Potential zu behandeln, in denen die Exzentrizität ε des Kegelschnitts (**III**.4.48) einen Wert $\varepsilon \geq 1$ annimmt, so dass der Körper der Masse m eine Parabel ($\varepsilon = 1$) oder Hyperbel ($\varepsilon > 1$) beschreibt. Das entspricht einer Situation, in der dieser Körper als Komet aus dem Unendlichen kommt, auf das Kraftzentrum zuläuft und dann an der Drehimpulsbarriere reflektiert, also *gestreut* wird. Im Sonderfall der Parabel besitzt der Körper die Energie $E = 0$ und kommt daher im Unendlichen zur Ruhe; im typischen Falle einer Hyperbel ist $E > 0$.
Auch hier ist es sinnvoll, die Bahnen nicht durch die Erhaltungsgrößen L und E, sondern durch zwei andere Parameter zu beschreiben, die (ähnlich wie die Halbachsen a und b im Falle der Ellipsen) unmittelbar die Bahngeometrie erkennen lassen. Zwei solche Parameter sind der Streuwinkel ϑ, der von den Asymptoten der Bahn eingeschlossen wird, und der Stoßparameter δ. Wie Abbildung **III**.6 verdeutlicht, versteht man darunter den Abstand der Asymptoten vom Kraftzentrum, also denjenigen Abstand, in dem das Teilchen das Kraftzentrum passieren würde, wenn es *nicht* gestreut würde.
Bezeichnet man denjenigen Winkel φ, der dem Teilchen auf der „auslaufenden“ Asymptote für $r \to \infty$ zukommt, mit φ_∞, so erhält man dafür aus der Kegelschnittgleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}\big(1 + \varepsilon\cos\varphi\big) \tag{**III**.4.64}$$

den Ausdruck

$$\cos\varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}\ . \tag{**III**.4.65}$$

Abbildung **III**.6: Die ungebundene Bewegung im $1/r$-Potential mit einer positiven Energie $E > 0$ führt auf Hyperbelbahnen. Der Streuwinkel ϑ ist der Winkel zwischen den Asymptoten an diese Hyperbeln; der Stoßparameter δ ist derjenige Abstand, in dem der Körper am Kraftzentrum vorbeifliegen würde, wenn er nicht gestreut würde.

Anhand der Abbildung **III**.6 erkennt man die Beziehung

$$\pi - \vartheta = 2(\pi - \varphi_\infty) \tag{**III**.4.66}$$

oder

$$\varphi_\infty - \frac{\pi}{2} = \frac{\vartheta}{2}\,, \tag{**III**.4.67}$$

so dass

$$\begin{aligned} \sin(\vartheta/2) &= \sin\varphi_\infty \cos(\pi/2) - \cos\varphi_\infty \sin(\pi/2) \\ &= -\cos\varphi_\infty \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{**III**.4.68}$$

Nun muss die Existenz der beiden Erhaltungsgrößen E und L ausgenutzt werden: Die erhaltene Energie besitzt im Unendlichen keinen potentiellen Anteil, also ist

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_\infty^{\,2}\,. \tag{**III**.4.69}$$

Auch der erhaltene Drehimpuls kann durch die asymptotische Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_\infty$ des ein- oder auslaufenden Teilchens ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} L &= m\,|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}| \\ &= m\,|\vec{r}_\infty \times \dot{\vec{r}}_\infty| \\ &= m\delta\,|\dot{\vec{r}}_\infty|\,, \end{aligned} \tag{**III**.4.70}$$

da in das Kreuzprodukt nur der zu $\dot{\vec{r}}_\infty$ senkrechte Anteil von $\vec{r}_\infty$ eingeht; wie Abbildung **III**.6 verdeutlicht, wird die Länge dieses Anteils durch den Stoßparameter δ gegeben. Damit hat man nun

$$\begin{aligned} L^2 &= m^2\delta^2\,|\dot{\vec{r}}_\infty|^2 \\ &= 2m\delta^2 E\;. \end{aligned} \tag{**III**.4.71}$$

In dem Bahnpunkt, der zum Winkel $\varphi = 0$ gehört, ist der Abstand $r_0 = r(\varphi = 0)$ vom Streuzentrum minimal; es gelten also die Identitäten

$$r_0 = \frac{k}{1+\varepsilon} \tag{**III**.4.72}$$

und

$$\dot{r}_0 = 0\;. \tag{**III**.4.73}$$

Die Energiegleichung

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \tag{**III**.4.74}$$

liefert daher für $r = r_0$ unter erneuter Verwendung des Ausdrucks (**III**.4.47), nämlich

$$k = \frac{L^2}{GMm^2}\;,$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= GMm\left(\frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0}\right) \\ &= GMm\left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{2k} - \frac{1+\varepsilon}{k}\right] \\ &= GMm\,\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-2-2\varepsilon}{2k} \\ &= GMm\,\frac{\varepsilon^2-1}{2k}\;. \end{aligned} \tag{**III**.4.75}$$

Daraus erhält man unter Berücksichtigung des Resultates (**III**.4.71) weiter

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - 1 &= \frac{2kE}{GMm} \\ &= \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3} \\ &= \left(\frac{2\delta E}{GMm}\right)^2\;; \end{aligned} \tag{**III**.4.76}$$

andererseits besagt die Identität (**III**.4.68), dass

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - 1 &= \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} - 1 \\ &= \cot^2(\vartheta/2) \; . \end{aligned} \tag{III.4.77}$$

Damit werden nun Stoßparameter δ und Streuwinkel ϑ eindeutig durch Energie E und Drehimpuls L festgelegt:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{L}{\sqrt{2mE}} \\ \tan(\vartheta/2) &= \frac{GMm}{2\delta E} \; . \end{aligned} \tag{III.4.78}$$

Diese Beziehungen gelten nicht nur für die Ablenkung von Kometen durch einen schweren Himmelskörper, sondern *mutatis mutandis* auch für die Ablenkung von Teilchen der Ladung q in dem Coulomb-Potential, das von einer raumfesten Punktladung Q hervorgerufen wird. Dann ist

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} \; , \tag{III.4.79}$$

wobei $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ As/(Vm) die Dielektrizitätskonstante des Vakuums bezeichnet. Wichtig ist, dass nun für die Streung von geladenen Teilchen einer scharf festgelegten Energie E nach Gleichung (**III**.4.78) ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Stoßparameter besteht. Wird also also ein Strahl monoenergetischer Teilchen der Ladung q auf die ruhende Punktladung Q geschossen, so werden alle Teilchen, die durch einen senkrecht zur Strahlachse orientierten Kreisring um Q mit den Radien δ und $\delta + \mathrm{d}\delta$, also mit der Fläche

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\delta \, \mathrm{d}\delta \tag{III.4.80}$$

hindurchtreten, unter einem Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ in das Raumwinkelelement

$$\mathrm{d}\Omega \;=\; -2\pi \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \;=\; -4\pi \sin(\vartheta/2)\cos(\vartheta/2) \, \mathrm{d}\vartheta \tag{III.4.81}$$

gestreut, wobei sich das negative Vorzeichen dadurch erklärt, dass zu einem größeren Stoßparameter ein kleinerer Winkel gehört, $\mathrm{d}\vartheta$ hier also negativ ist. Weiterhin gilt nach Gleichung (**III**.4.78) der Zusammenhang

$$\delta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{Qq}{2E} \, \cot(\vartheta/2) \; ; \tag{III.4.82}$$

daraus erhält man

$$\mathrm{d}\delta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{Qq}{2E} \, \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}\vartheta \; . \tag{III.4.83}$$

Ist nun j die Intensität des auf das Target einfallenden Teilchenstroms, also die Anzahl der Teilchen pro Fläche und Zeit, die durch eine senkrecht zur Strahlachse stehende Fläche hindurchtreten, so wird die Anzahl derjenigen Teilchen, die pro Zeit nach $\mathrm{d}\Omega$ gestreut werden, gegeben durch

$$\mathrm{d}\dot{N} = j\,\mathrm{d}\sigma\ . \tag{**III**.4.84}$$

Die auf den einfallenden Strom normierte Streurate nach $\mathrm{d}\Omega$, die eine spezifische Eigenschaft des Targets darstellt, ist daher

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma &= 2\pi\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{2E}\right)^2\frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{2E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}\mathrm{d}\Omega\ .\end{aligned} \tag{**III**.4.85}$$

Die Größe $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$, also die normierte Streurate $\mathrm{d}\sigma$ pro Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$, die offensichtlich die Dimension einer *Fläche* besitzt, wird als *differentieller Wirkungsquerschnitt* bezeichnet; der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} \tag{**III**.4.86}$$

ist daher der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung geladener Teilchen der Ladung q und Energie E an einem raumfesten Coulomb-Potential, das von einer Ladung Q hervorgerufen wird.
Aus der Tatsache, dass dieser Ausdruck (**III**.4.86) auch die Streuung von α-Teilchen an einer dünnen Goldfolie zutreffend beschreibt, schloss Ernest Rutherford, dass die positiven Ladungen in einem Atom auf einen sehr kleinen „Atomkern“ konzentriert sein müssen; die Beziehung (**III**.4.86) wird daher auch als *Rutherfordsche Streuformel* bezeichnet.[7]

[7] *Nach Wikipedia:* Ernest Rutherford, 1. Baron Rutherford of Nelson (geb. am 30. August 1871 in Spring Grove bei Nelson; gest. am 19. Oktober 1937 in Cambridge) war ein bedeutender neuseeländischer Experimentalphysiker. Rutherford erkannte 1897, dass die ionisierende Strahlung des Urans aus mehreren Teilchenarten besteht. 1902 stellte er die Hypothese auf, dass chemische Elemente durch radioaktiven Zerfall in Elemente mit niedrigerer Ordnungszahl übergehen. Er teilte 1903 die Radioaktivität in Alphastrahlung, Betastrahlung sowie Gammastrahlung nach der positiven, negativen oder neutralen Ablenkung der Strahlenteilchen in einem Magnetfeld auf und führte den Begriff der Halbwertszeit ein. Diese Arbeit wurde 1908 mit dem Nobelpreis für Chemie ausgezeichnet. Sein bekanntester Beitrag zur Atomphysik ist das Rutherfordsche Atommodell, das er 1911 aus seinen Streuversuchen von Alphateilchen an Goldfolie ableitete. Rutherford widerlegte damit das Atommodell von Thomson, der noch von einer gleichmäßigen Masseverteilung ausgegangen war. 1917 weis er erstmals experimentell nach, dass durch Bestrahlung mit Alphateilchen ein Atomkern (in seinem Falle Stickstoff) in einen anderen (in seinem Falle in das nächstschwerere Element Sauerstoff) umgewandelt werden kann. Bei diesen Experimenten entdeckte er das Proton. Unter seiner Anleitung „zertrümmerten“ John Cockcroft und Ernest Walton mit künstlich beschleunigten Teilchen einen Atomkern; mit Protonen beschossenes Lithium spaltete sich auf in zwei Alphateilchen, also Helium-Kerne. Einem weiteren Wissenschaftler in Cambridge, James Chadwick, gelang es 1932, das Neutron experimentell nachzuweisen, dessen Existenz Rutherford bereits Jahre vorher theoretisch postuliert hatte.

III.5 *Einschub*: Numerische Integration von DGLn

Sehr häufig ist es nicht möglich, analytische Lösungen einer DGL zu finden. Daher gehört die *numerische* Lösung von DGLn zu den wichtigsten Aufgaben der angewandten Mathematik; ein Physiker benötigt zumindest eine grobe Kenntnis der dafür zur Verfügung stehenden Verfahren. In diesem Abschnitt sollen daher verschiedene Algorithmen zur näherungsweisen Lösung von gewöhnlichen DGLn erster Ordnung skizziert werden, also von DGLn der bekannten Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{**III**.5.1}$$

mit einer unabhängigen Variablen x; gesucht wird eine gute Näherung für die Lösungsfunktion $y(x)$. Dabei darf diese Funktion auch vektorwertig sein, also

$$y(x) = \big(y_1(x), \ldots, y_d(x)\big) \;, \tag{**III**.5.2}$$

so dass dann die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ definiert ist. Auf diese Weise ist es insbesondere möglich, gewöhnliche DGLn *höherer* Ordnung auf ein solches System von gekoppelten DGLn *erster* Ordnung zurückzuführen. Betrachtet man etwa die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = F(x,t) \;, \tag{**III**.5.3}$$

wobei hier die Zeit t die unabhängige Variable darstellt und die Trajektorie $x(t)$ gesucht wird, so definiert man zunächst die zu $\dot{x}$ proportionale Größe

$$p(t) = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{**III**.5.4}$$

und erhält dann für das Tupel $y(t) = \big(x(t), p(t)\big)$ das gekoppelte System

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m} \qquad ; \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F(x,t) \;. \tag{**III**.5.5}$$

In analoger Weise lässt sich eine DGL m-ter Ordnung in ein System von m gekoppelten DGLn erster Ordnung überführen.
Als Anfangswert für die Lösung der DGL (**III**.5.1) sei $y(x=0) = y_0$ vorgegeben; gesucht wird die zugehörige Lösungsfunktion $y(x)$ etwa auf dem Intervall $[0,1]$. Dazu wird dieses Intervall zunächst in N gleichgroße Teilintervalle unterteilt, wobei die Schrittweite $h = 1/N$ so klein sein soll, dass die Kenntnis der Funktionswerte $y_n = y(x_n = nh)$ nur auf dem diskreten Gitter $\{x_n = nh \,; n = 0,1,2,\ldots,N\}$ schon die typischen Eigenschaften der Lösung erkennen lässt, die Funktion $y(x)$ also hinreichend fein abgerastert wird.
Das einfachste approximative Verfahren zur Bestimmung der Lösung auf dem gewählten Gitter ergibt sich, wenn man die Ableitung auf der linken Seite der DGL (**III**.5.1) durch einen „Vorwärts-Differenzenquotienten“ ersetzt:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \mathcal{O}(h) = f(x_n, y_n) \;; \tag{**III**.5.6}$$

daraus folgt die Rekursionsrelation

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^2) \; . \tag{**III**.5.7}$$

Diese als *Euler-Verfahren*[8] bekannte Methode besitzt somit einen *lokalen* Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$, da y_{n+1} aus der Kenntnis seines Vorgängers y_n mit eben dieser Genauigkeit bestimmt werden kann; für die Berechnung von $y(1) = y_N$ ergibt sich nach N Schritten ein *globaler* Fehler der Ordnung $N\mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h)$. Dieser Fehler nimmt lediglich linear mit der Schrittweite h ab, so dass die Schrittweite halbiert und damit die Schrittzahl verdoppelt werden muss, um auch die Ungenauigkeit des Endwertes $y(1)$ zu halbieren. Der numerische Aufwand, den dieses Euler-Verfahren verlangt, besteht in einer einmaligen Auswertung der Funktion f in jedem Schritt.
Es nun offenbar sinnvoll, Lösungsverfahren mit einem kleineren lokalen Fehler zu suchen, um den Endwert bereits nach relativ wenigen Schritten mit akzeptabler Genauigkeit berechnen zu können. Dazu kann man etwa die Taylorentwicklung von y über die lineare Näherung (**III**.5.7) hinaus fortsetzen, auf der das Euler-Verfahren beruht: In quadratischer Näherung erhält man die Rekursion

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{2}h^2 y''_n + \mathcal{O}(h^3) \tag{**III**.5.8}$$

mit einem lokalen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^3)$. Allerdings erhöht sich der notwendige numerische Aufwand beträchtlich: Man hat nun

$$y'_n = f(x_n, y_n) \tag{**III**.5.9}$$

und

$$\begin{aligned} y''_n &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_n, y_n) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_n \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, f\right]_n \; ; \end{aligned} \tag{**III**.5.10}$$

[8] *Nach Wikipedia:* Leonhard Euler (geb. am 15. April 1707 in Basel; gest. am 7. September (jul.) / 18. September 1783 (greg.) in Sankt Petersburg) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker.

Ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück (z.B. e, π, i, das Summenzeichen $\sum$ und $f(x)$ als Bezeichnung eines Funktionswertes). 1744 gab er ein Lehrbuch der Variationsrechnung heraus. Euler kann auch als einer der Begründer der Analysis angesehen werden. 1748 publizierte er das Grundlagenwerk *Introductio in analysin infinitorum*, in dem zum ersten Mal der Begriff der Funktion eine zentrale Rolle spielt. In den Werken *Institutiones calculi differentialis* (1755) und *Institutiones calculi integralis* (1768 – 1770) beschäftigte er sich außer mit der Differential- und Integralrechnung unter anderem mit Differenzengleichungen, elliptischen Integralen sowie mit der Theorie der Gamma- und Betafunktion. Andere Arbeiten setzen sich mit Zahlentheorie, Algebra (z.B. Vollständige Anleitung zur Algebra, 1770) und sogar mit der Anwendung mathematischer Methoden in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften auseinander (z.B. Rentenrechnung, Lotterien, Lebenserwartung). Seine 1736 veröffentlichte Arbeit *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* beschäftigt sich mit dem Königsberger Brückenproblem und gilt als eine der ersten Arbeiten auf dem Gebiet der Graphentheorie.

das ergibt

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{1}{2}h^2 \left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right]_n + \mathcal{O}(h^3) \,, \tag{**III**.5.11}$$

wobei $f_n = f(x_n, y_n)$ und der Index n an der Klammer anzeigt, dass der Klammerinhalt an der Stelle (x_n, y_n) zu berechnen ist. Daher müssen nun in jedem Schritt die Funktion f und die partiellen Ableitungen $\partial f/\partial x$ sowie $\partial f/\partial y$ ausgewertet werden. Wenn die Funktion f analytisch gegeben und einfach abzuleiten ist, kann dieses verbesserte Euler-Verfahren (**III**.5.11) dennoch sehr nützlich sein. Nach diesem Muster könnte man auch noch weitere Terme der Taylorentwicklung von y berücksichtigen, allerdings wird der dazu notwendige algebraisch-numerische Aufwand sehr bald außerordentlich hoch.
Eine andere Möglichkeit zur Erzielung einer höheren Genauigkeit besteht darin, Rekursionsrelationen zu benutzen, die y_{n+1} nicht nur mit y_n, sondern auch mit weiteren „Vorgängern“ y_{n-1}, y_{n-2}, … in Verbindung bringen. Solche *Mehrschritt-Verfahren* ergeben sich aus der Identität

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{d}x\, f\big(x, y(x)\big) \,, \tag{**III**.5.12}$$

deren exakte Auswertung allerdings die vollständige Kenntnis der Lösungsfunktion $y(x)$ auf dem Integrationsintervall verlangen würde. Nun lässt sich jedoch die vorhandene Kenntnis der Funktionswerte $y_n = y(x_n)$ und $y_{n-1} = y(x_{n-1})$ ausnutzen, um die Funktion f auf diesem Intervall linear zu extrapolieren:

$$f = \frac{(x - x_{n-1})}{h} f_n - \frac{(x - x_n)}{h} f_{n-1} + \mathcal{O}(h^2) \,, \tag{**III**.5.13}$$

wobei wieder $f_n = f(x_n, y_n)$. Setzt man diese Extrapolation in die Identität (**III**.5.12) ein und wertet die Integrale aus, ergibt sich das *Adams-Bashforth-Zweischritt-Verfahren*:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}\right) + \mathcal{O}(h^3) \,. \tag{**III**.5.14}$$

Hier lässt sich die Genauigkeit relativ einfach steigern, indem man die Funktion f mit Hilfe eines Polynoms höherer Ordnung extrapoliert; allerdings werden dafür auch entsprechend viele Vorgänger benötigt. Bei Verwendung eines kubischen Polynoms, das an die Werte f_n, f_{n-1}, f_{n-2} und f_{n-3} gefittet wird, erhält man auf diese Weise das *Adams-Bashforth-Vierschritt-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\big(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\big) + \mathcal{O}(h^5) \,, \tag{**III**.5.15}$$

das mit einem lokalen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^5)$ bereits sehr genau ist. Nun reicht jedoch die Kenntnis des Anfangswertes y_0 nicht mehr aus, um die Rekursion zu starten. Man benötigt daher zustätzlich noch ein weiteres Verfahren, um die Werte von y nur auf den ersten Gitterpunkten zu berechnen; dafür kann bereits das einfache oder verbesserte Euler-Verfahren ausreichend sein.

Alle bisher vorgestellten Verfahren sind „explizit“ in dem Sinne, dass y_{n+1} unmittelbar durch die bereits bekannten vorherigen Werte y_n, y_{n-1}, ... gegeben wird. Demgegenüber liefern „implizite“ Verfahren, bei denen sich y_{n+1} erst aus der Lösung einer Gleichung ergibt, weitere Möglichkeiten zur Erzielung einer höheren Genauigkeit. Dazu kann man etwa die Ableitung (**III**.5.1) auch an einem „Zwischengitterplatz“ $x_{n+1/2} = (n + 1/2)h$ betrachten:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{n+1/2}} \;=\; y'_{n+1/2} \;=\; f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) \;. \tag{**III**.5.16}$$

Dann gelten nämlich die Entwicklungen

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_{n+1/2} + \frac{h}{2}y'_{n+1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 y''_{n+1/2} + \mathcal{O}(h^3) \\ y_n &= y_{n+1/2} - \frac{h}{2}y'_{n+1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 y''_{n+1/2} + \mathcal{O}(h^3) \;, \end{aligned} \tag{**III**.5.17}$$

so dass die Approximation von $y'_{n+1/2}$ durch einen „zentrierten Differenzenquotienten“ nur mit einem lokalen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ verbunden ist:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'_{n+1/2} + \mathcal{O}(h^2) \;. \tag{**III**.5.18}$$

Andererseits hat man

$$\begin{aligned} y'_{n+1} &= y'_{n+1/2} + \frac{h}{2}y''_{n+1/2} + \mathcal{O}(h^2) \\ y'_n &= y'_{n+1/2} - \frac{h}{2}y''_{n+1/2} + \mathcal{O}(h^2) \;, \end{aligned} \tag{**III**.5.19}$$

und damit auch

$$y'_{n+1/2} = \frac{1}{2}\big(y'_{n+1} + y'_n\big) + \mathcal{O}(h^2) \;. \tag{**III**.5.20}$$

Damit liefert die Gleichung (**III**.5.16) nun

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{2}\big(f_n + f_{n+1}\big) + \mathcal{O}(h^2) \;; \tag{**III**.5.21}$$

das ergibt die Rekursionsrelation

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\big] + \mathcal{O}(h^3) \;. \tag{**III**.5.22}$$

Der implizite Charakter dieses Verfahrens äußert sich darin, dass y_{n+1} auf beiden Seiten dieser Gleichung auftaucht, so dass im allgemeinen Fall diese Gleichung in jedem Integrationsschritt nach y_{n+1} aufgelöst werden muss. Eine erhebliche Vereinfachung ergibt sich, wenn f linear in y ist, wenn also

$$f(x, y) = g(x)y \;, \tag{**III**.5.23}$$

dann erhält man sofort

$$y_{n+1} = \frac{1 \;+\; hg(x_n)/2}{1 - hg(x_{n+1})/2}\, y_n + \mathcal{O}(h^3)\;. \tag{**III**.5.24}$$

Auch implizite Mehrschritt-Verfahren lassen sich recht einfach formulieren. Die Grundidee der Adams-Bashforth-Verfahren (**III**.5.14) und (**III**.5.15) besteht darin, die Funktion $f\big(x, y(x)\big)$ unter dem Integral (**III**.5.12) durch ein Polynom zu approximieren, wobei zum Fit des Polynoms die bereits bekannten Werte $f_n = f(x_n, y_n)$, $f_{n-1}, \ldots$ herangezogen wurden. Benutzt man auch den noch unbekannten Wert f_{n+1}, so ergeben sich die impliziten *Adams-Moulton-Verfahren*. Aus dem quadratischen Fit

$$\begin{aligned} f \;\; = \;\; & \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{2h^2} f_{n+1} \\ & - \frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n-1})}{h^2} f_n \\ & + \frac{(x-x_{n+1})(x-x_n)}{2h^2} f_{n-1} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \tag{**III**.5.25}$$

erhält man durch Einsetzen in die Identität (**III**.5.12) das implizite Zweischritt-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\big(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}\big) + \mathcal{O}(h^4)\;; \tag{**III**.5.26}$$

ein kubischer Polynomfit führt auf die Dreischritt-Formel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\big(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\big) + \mathcal{O}(h^5)\;. \tag{**III**.5.27}$$

Implizite Verfahren werden nur selten „in Reinform“ zur Durchführung eines Integrationsschrittes herangezogen. Stattdessen dienen sie als Basis für *Predictor-Corrector-Algorithmen*, welche zunächst mit Hilfe einer expliziten Methode eine „Vorhersage“ für y_{n+1} berechnen. Dieser vorhergesagte Wert wird dann „korrigiert“, indem er mittels einer impliziten Methode zur Bestimmung einer verbesserten Näherung verwendet wird. Solche Verfahren haben den großen Vorteil, dass sie die Genauigkeit der Integration fortlaufend zu bestimmen gestatten, indem die Größe der Korrektur festgehalten wird; wenn der Betrag dieser Korrektur eine festgelegte Toleranz überschreitet, kann die Schrittweite verkleinert werden. Ein häufig eingesetzter Predictor-Corrector-Algorithmus mit einem lokalen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^5)$ verwendet das explizite Adams-Bashforth-Vierschritt-Verfahren (**III**.5.15) zur Berechnung der Vorhersage y_{n+1} und dann das Adams-Moulton-Dreischritt-Verfahren (**III**.5.27) zur anschließenden Berechnung des korrigierten Wertes, wobei die Vorhersage benutzt wird, um f_{n+1} auf der rechten Seite dieser Gleichung auszuwerten.

Es gibt somit eine große Vielfalt verschiedener Integrationsverfahren; die Wahl des jeweils besten Verfahrens hängt natürlich entscheidend von der konkreten Gestalt der Funktion $f(x, y)$ ab. Die im Folgenden behandelten *Runge-Kutta-Algorithmen* besitzen den Vorteil, dass sie einerseits vergleichsweise einfach und andererseits universell einsetzbar sind.

Ein Runge[9]-Kutta[10]-Verfahren zweiter Ordnung (kurz: RK2) ergibt sich, wenn man die Funktion $f\big(x, y(x)\big)$ unter dem Integral (**III**.5.12) quadratisch um den Mittelpunkt $x_{n+1/2}$ des Integrationsintervalls entwickelt: Da dann der lineare Term der Entwicklung bei der Integration verschwindet, erhält man

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^3) \qquad (\textbf{III}.5.28)$$

mit einem lokalen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^3)$, der durch den quadratischen Term der Entwicklung bedingt wird. Aufgrund dieses Fehlers ist es ausreichend, den unbekannten Wert $y_{n+1/2}$ mit einer Genauigkeit nur der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ zu bestimmen, wenn der Gesamtfehler von gleicher Ordnung bleiben soll. Diese Genauigkeit liefert aber bereits das einfache Euler-Verfahren (**III**.5.7). Definiert man also in einem ersten Schritt die Hilfsgröße

$$k = hf(x_n, y_n) \ , \qquad (\textbf{III}.5.29)$$

so ergibt sich mit deren Hilfe im zweiten Schritt die gesuchte Näherung

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_n + k/2) + \mathcal{O}(h^3) \ . \qquad (\textbf{III}.5.30)$$

Diese beiden Gleichungen (**III**.5.29) und (**III**.5.30) bilden einen Runge-Kutta-Algorithmus zweiter Ordnung. Er ist mit einem lokalen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^3)$ ebenso genau wie das verbesserte Euler-Verfahren (**III**.5.11) oder das implizite Verfahren (**III**.5.22), stellt aber keine besonderen Ansprüche an die Funktion f, wie etwa deren leichte Differenzierbarkeit oder Linearität in y. Im Unterschied zu den Mehrschritt-Verfahren wird der Wert von y nur an einer einzigen Stelle benötigt; jedoch muss nun in jedem Integrationsschritt die Funktion f zweimal ausgewertet werden.
Auf ähnliche Weise lassen sich auch Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung herleiten. Ausgangspunkt ist stets eine Näherung für das Integral (**III**.5.12): So erhält man aus der bekannten Simpson-Regel die Approximation

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\big[f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\big] + \mathcal{O}(h^5) \ . \qquad (\textbf{III}.5.31)$$

[9] *Nach Wikipedia:* Carl David Tolmé Runge (geb. am 30. August 1856 in Bremen; gest. am 3. Januar 1927 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker, dessen Arbeitsgebiet zunächst rein mathematisch geprägt war. Von Kronecker bekam er die Anregung zur Zahlentheorie und von Weierstraß zur Funktionentheorie. Nachdem er von der Balmer-Serie erfahren hatte, untersuchte er zusammen mit Heinrich Kayser andere Linienspektren und leistete somit Beiträge zur Physik der Spektroskopie. In Göttingen entwickelte er zusammen mit Martin Wilhelm Kutta das Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen. Bekannt ist auch seine Untersuchung von Interpolationspolynomen und deren Verhalten bei Erhöhung des Polynomgrads, dem „Rungeschen Phänomen“. In der Funktionentheorie untersuchte er die Approximierbarkeit von holomorphen Funktionen und begründete damit die Runge-Theorie.

[10] *Nach Wikipedia:* Martin Wilhelm Kutta (geb. am 3. November 1867 in Pitschen, Oberschlesien; gest. am 25. Dezember 1944 in Fürstenfeldbruck) war ein deutscher Mathematiker. Kutta wirkte von 1909 bis 1910 als außerordentlicher Professor an der Universität Jena, von 1910 bis 1912 war er außerordentlicher Professor an der RWTH Aachen. 1912 wurde Kutta ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart und blieb dort bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1935. Bereits 1901 hatte er aufbauend auf einem Artikel von Carl Runge das Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen weiterentwickelt. Bekannt ist er auch als Mitentwickler der Kutta-Schukowski-Transformation für die Berechnung von Tragflächenprofilen.

Weiterhin müssen dann sukzessive ordnungskompatible Näherungen für diejenigen Werte von y berechnet werden, die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftauchen. Ein RK3-Algorithmus, also ein Runge-Kutta-Algorithmus dritter Ordnung mit einem lokalen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^4)$ lautet

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) + \mathcal{O}(h^4)\ , \end{aligned} \tag{**III**.5.32}$$

wobei die Funktion f in jedem Schritt dreimal auszuwerten ist. Schließlich soll noch ein RK4-Verfahren angegeben werden, das für jeden Integrationsschritt vier Auswertungen von f verlangt und mit einem lokalen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^5)$ bereits eine recht hohe Genauigkeit besitzt:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5)\ . \end{aligned} \tag{**III**.5.33}$$

Dieser Algorithmus erweist sich in der Praxis oft als ein ausgezeichneter Kompromiss bei der Lösung der Aufgabe, möglichst hohe Genauigkeit mit möglichst geringem numerischen Aufwand zu erzielen.

III.6 Ordnung und Chaos bei zweidimensionaler Bewegung

Die eindimensionale Newtonsche Bewegungsgleichung (**III**.3.1) konnte aufgrund der Existenz einer *Erhaltungsgröße*, nämlich der Energie (**III**.3.6), *immer* durch Umkehrung des Integrals (**III**.3.8) „im Prinzip“ gelöst werden, auch wenn dieses Integral nicht immer durch bekannte Funktionen ausgedrückt werden kann. Weiterhin konnte die ursprünglich dreidimensionale Bewegungsgleichung für ein Teilchen in einen radialsymmetrischen Kraftfeld aufgrund der Existenz weiterer Erhaltungsgrößen, nämlich der Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$, auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt und damit ebenfalls gelöst werden.
Mechanische Systeme mit mehr als einem Freiheitsgrad, die in diesem Sinne lösbar sind, stellen jedoch Ausnahmen dar: Typische Systeme mit zwei und mehr Freiheitsgraden sind *nicht integrabel*, also nicht in dem bisherigen Sinne lösbar, und verhalten sich zudem grundsätzlich anders als die häufig zu Übungszwecken herangezogenen, aber untypischen integrablen Systeme.
Um den Unterschied zwischen integrablen und nicht integrablen mechanischen Systemen herauszuarbeiten, soll in diesem Abschnitt das Verhalten eines typischen Systems mit zwei Freiheitsgraden näher untersucht werden, also etwa eines Teilchens der Masse m, das sich

unter dem Einfluss eines Potentials $V(x,y)$ in der x-y-Ebene bewegt. Unter Verwendung der beiden Impulskomponenten

$$\begin{aligned} p_x(t) &= m\dot{x}(t) \\ p_y(t) &= m\dot{y}(t) \end{aligned} \qquad (\textbf{III}.6.1)$$

erhält die Bewegungsgleichung die Form

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(t) &= -\frac{\partial}{\partial x} V\big(x(t),y(t)\big) \\ \dot{p}_y(t) &= -\frac{\partial}{\partial y} V\big(x(t),y(t)\big)\ . \end{aligned} \qquad (\textbf{III}.6.2)$$

Die Lösungen $\big(p_x(t),p_y(t),x(t),y(t)\big)$ des Systems dieser vier gekoppelten DGLn (**III**.6.1) und (**III**.6.2) verlaufen nun in einem vierdimensionalen *Phasenraum* $\{(p_x,p_y,x,y)\}$, der von den Impuls- und Ortskoordinaten aufgespannt wird. Allerdings kann eine solche Lösungskurve nicht an jeden Punkt des Phasenraums gelangen, da ja die Energie des Teilchens erhalten ist: Setzt man eine Lösung in die Energiefunktion

$$H(p_x,p_y,x,y) = \frac{1}{2m}\big(p_x^2+p_y^2\big) + V(x,y) \qquad (\textbf{III}.6.3)$$

ein, so ergibt sich zu jedem Zeitpunkt die erhaltene Energie E, die das Teilchen auf dieser Lösungskurve besitzt. Daher können maximal drei der vier Phasenraumkoordinaten beliebig vorgegeben werden; die vierte ergibt sich dann aus dem Wert der Energie. Die Trajektorien des Teilchens verlaufen also auf einer dreidimensionalen Untermenge des vierdimensionalen Phasenraums, die durch die Erhaltungsgröße E festgelegt wird.
Falls nun neben der Energie E noch eine weitere, davon unabhängige Erhaltungsgröße existiert, müssen die Trajektorien sogar an eine nur noch *zwei*dimensionale Untermenge des vierdimensionalen Phasenraums gebunden bleiben; genau dann ist das System im Sinne der theoretischen Mechanik „integrabel“. Diese Situation bildet den Prototyp für den allgemeinen Fall:

> *Ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden ist* integrabel, *wenn es f unabhängige Erhaltungsgrößen besitzt.*

Vielleicht unerwartet, aber sehr wichtig ist die Tatsache, dass die zweidimensionalen Untermengen, auf denen die Bewegung integrabler Systeme mit zwei Freiheitsgraden in ihrem jeweiligen Phasenraum verläuft, im generischen Fall (d.h. fast immer) eine *universelle* Topologie besitzen:

> *Sofern die Bewegung eines integrablen mechanischen Systems mit zwei Freiheitsgraden beschränkt bleibt, verläuft sie fast immer auf einem zweidimensionalen Torus, der in den vierdimensionalen Phasenraum eingebettet ist.*

Diese Aussage, die hier nicht bewiesen werden kann, bildet einen Spezialfall des Liouville-Arnold-Theorems, das sich auf den allgemeinen Fall integrabler Systeme mit f Freiheitsgraden bezieht und besagt, dass dann die Bewegung im $2f$-dimensionalen Phasenraum an

Abbildung **III**.7: (a) Die gebundene Bewegung eines Teilchens in einem Zentralpotential führt auf Radialoszillationen, die in der p_r-r-Ebene als geschlossene Kurven mit der Topologie eines Kreises S^1 dargestellt werden. (b) Aufgrund der Rotationssymmetrie des Potentials können diese Kreise um einen beliebigen Winkel um die p_r-Achse gedreht werden. Im reduzierten Phasenraum $\{(p_r, x, y)\}$ verläuft die Bewegung bei gegebener Energie und gegebenem Drehimpuls daher auf einem Torus mit der Topologie $S^1 \times S^1$.

f-dimensionale Tori gebunden bleibt. Für den bereits bekannten Fall eines Teilchens, das sich unter dem Einfluss eines Zentralpotentials in einer Ebene bewegt, kann sie besonders einfach veranschaulicht werden: Mit dem Radialimpuls $p_r = m\dot{r}$ und dem Drehimpuls $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ hat man zunächst den Phasenraum $\{(p_r, p_\varphi, r, \varphi)\}$. Da nun der Drehimpuls $p_\varphi = L$ erhalten ist, sind die gesuchten zweidimensionalen Untermengen der Bewegung in einen dreidimensionalen Raum $\{(p_r, r, \varphi)\}$ oder $\{(p_r, x, y)\}$ eingebettet; dieser kann mit dem „Anschauungsraum“ $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden. Nun hat die Energiefunktion die vertraute Gestalt

$$H(p_r, L, r, \varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \; . \tag{**III**.6.4}$$

Für ein effektives Potential der Form, wie es in Abbildung **III**.4 dargestellt ist sowie eine negative Energie, die für beschränkte Bewegung vorausgesetzt werden muss, ergeben sich Oszillationen der Radialkoordinate $r(t)$ zwischen zwei Umkehrpunkten, die aus der Lösung der Gleichung

$$V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E \tag{**III**.6.5}$$

erhalten werden. Der Radialimpuls des Teilchens bei dieser Oszillation ist nun

$$p_r = \pm \left[2m\big(E - V(r)\big) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} \; , \tag{**III**.6.6}$$

wobei das positive Vorzeichen für die nach außen und das negative Vorzeichen für die nach innen gerichtete Bewegung zu nehmen ist. Trägt man diese Radialimpulse p_r über der Radialkoordinate r auf, so ergeben sich die aus den Phasenraumportraits für eindimensionale

Oszillationen vertrauten geschlossenen Kurven mit der Topologie eines Kreises. Wegen der Rotationssymmetrie des Zentralpotentials $V(r)$ kann man diese geschlossenen Kurven nun mit beliebigem Winkel um die p_r-Achse rotieren, wie in der Abbildung **III**.7 dargestellt, so dass sich die gesuchten Tori ergeben. Im allgemeinen Fall können die Tori jedoch auf deutlich kompliziertere Weise in den vierdimensionalen Phasenraum eingebettet sein.
Nun ergibt sich eine naheliegende Frage: Was passiert eigentlich, wenn für den Fall eines Teilchens in einem Zentralpotential die Rotationssymmetrie „gebrochen“ wird, indem man zu dem Zentralpotential $V(r)$ eine Störung $V_S(r, \varphi)$ hinzufügt, die auch vom Azimutalwinkel φ abhängt, so dass der Drehimpuls nicht mehr erhalten ist? Oder allgemeiner gefragt: Was passiert, wenn ein integrables System mit zwei Freiheitsgraden so gestört wird, dass nur die Energie als einzige Erhaltungsgröße übrig bleibt?
Die Antwort auf diese Frage ist überraschend kompliziert und weitreichend. Ein wichtiger Teil dieser Antwort wird zusammengefasst durch das Theorem von Kolmogorov[11], Arnold[12] und Moser[13], das nach den Anfangsbuchstaben seiner drei geistigen Väter kurz als *KAM-Theorem* bezeichnet wird. Um es für den Fall eines Systems mit zwei Freiheitsgraden formulieren zu können, muss man wissen, dass die Bewegung auf den Tori des ungestörten Systems durch zwei (torusabhängige) Umlauffrequenzen ω_1 und ω_2 für die beiden topologisch unabhängigen Richtungen auf dem jeweiligen Torus beschrieben wird; der Quotient ω_1/ω_2 dieser Frequenzen wird als *Windungszahl* bezeichnet. Dann macht das

[11] *Nach Wikipedia:* Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (geb. am 12. (jul.) / 25. (greg.) April 1903 in Tambow; gest. am 20. Oktober 1987 in Moskau; wissenschaftliche Transliteration Andrej Nikolaevič Kolmogorov) war einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Kolmogorow leistete wesentliche Beiträge auf den Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Topologie und gilt als Begründer der Algorithmischen Komplexitätstheorie. Seine bekannteste mathematische Leistung war die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Als Student arbeitete (und publizierte) er außerdem über Logik und Fourierreihen, später über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Turbulenz und der klassischen Mechanik.

[12] *Nach Wikipedia:* Wladimir Igorewitsch Arnold (geb. am 12. Juni 1937 in Odessa, UdSSR; gest. am 3. Juni 2010 in Paris, Frankreich; wiss. Transliteration Vladimir Igorevič Arnol'd) war ein herausragender russischer Mathematiker. Er studierte ab 1954 bei Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow in Moskau mit dem Abschluss 1959 und der Promotion 1961 (russischer Kandidatentitel) und war von 1965 bis 1986 Professor an der Staatlichen Universität Moskau, seit 1986 am Steklow-Institut für Mathematik in Moskau und gleichzeitig seit 1993 an der Universität Paris 9. 1964 entdeckte er die nach ihm benannte Arnold-Diffusion. Diese ist nach Arnold sein wichtigster Beitrag zur KAM-Theorie und beschreibt die allgemeine Ursache der Instabilität in (deterministischen) dynamischen Systemen mit mehreren Freiheitsgraden.

[13] *Nach Wikipedia:* Jürgen Kurt Moser (geb. am 4. Juli 1928 in Königsberg in Ostpreußen; gest. am 17. Dezember 1999 in Zürich) war ein deutsch-amerikanisch-schweizerischer Mathematiker. Sein Forschungsgebiet war die Analysis, wo er hauptsächlich auf dem Gebiet der Differentialgleichungen und der Theorie der dynamischen Systeme arbeitete. Am bekanntesten ist Moser für seine Beiträge zur nach Andrei Kolmogorow, Wladimir Arnold und ihm benannten KAM-Theorie, die ihren Ursprung in der Störungstheorie zum Mehrkörperproblem in der Himmelsmechanik hat. Das Hauptergebnis der Theorie sind Aussagen über die Existenz stabiler Tori im Phasenraum, um die sich bei kleinen Störungen die Körper quasiperiodisch bewegen. Er leistete noch viele weitere wichtige Beiträge speziell zur Theorie partieller Differentialgleichungen (die Nash-Moser-Theorie ist nach ihm und John Nash benannt), zur Theorie integrabler Systeme, und zur komplexen Analysis mehrerer Variabler, wo er in Zusammenarbeit mit Shiing-Shen Chern die Chern-Moser Invarianten von reellen Hyperflächen einführte und mit Sidney Webster isolierte komplexe Punkte von reellen Flächen der Kodimension zwei im zwei-komplexdimensionalen Raum studierte.

KAM-Theorem die folgende Aussage:

> *Die Tori im Phasenraum eines integrablen Systems mit zwei Freiheitsgraden, die eine „hinreichend irrationale" Windungszahl besitzen, werden unter dem Einfluss einer kleinen Störung zwar deformiert, bleiben aber (bis zu einer von der Windungszahl abhängigen „kritischen" Störstärke, über die das Theorem nichts aussagt) erhalten.*

Dabei wird der „Grad der Irrationalität" einer reellen Zahl durch die Koeffizienten festgelegt, die bei ihrer Kettenbruchzerlegung auftreten.
Ein weiterer Teil der Antwort auf die obige Frage betrifft die Tori mit „nicht hinreichend irrationalen" (also insbesondere allen rationalen) Frequenzverhältnissen: Diese werden nämlich durch die Störung zerstört und rufen „chaotische" Bewegung hervor.
Ein typisches (also nicht integrables) mechanisches System mit zwei Freiheitsgraden weist daher ein sehr kompliziertes *Nebeneinander von Ordnung und Chaos* auf: Ein Teil der Phasenraumtrajektorien verläuft auf zweidimensionalen Tori; dieser Teil stellt den geordneten Teil der Bewegung dar. Ein anderer Teil der Trajektorien verläuft in scheinbar irregulärer Weise in einer dreidimensionalen Untermenge des Phasenraums; dieser Teil wird als „chaotisch" bezeichnet.
Um dieses Nebeneinander von Ordnung und Chaos sichtbar zu machen, ist man auf numerische Lösungen der Bewegungsgleichungen angewiesen. Ein für numerische Untersuchungen sehr geeignetes Modellpotential ergibt sich, wenn man dem Potential eines isotropen harmonischen Oszillators mit der Oszillatorfrequenz ω zwei kubische Störungen hinzufügt:

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right) + \alpha x^2 y - \frac{\beta}{3}y^3 \; ; \tag{**III**.6.7}$$

dabei besitzen die „Störstärken" α und β die Dimension Energie/Länge^3. Das zugehörige System der Differentialgleichungen (**III**.6.1) und (**III**.6.2) erhält hier die konkrete Gestalt

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{p_x}{m} \\
\dot{y} &= \frac{p_y}{m} \\
\dot{p}_x &= -m\omega^2 x - 2\alpha xy \\
\dot{p}_y &= -m\omega^2 y - \alpha x^2 + \beta y^2 \; .
\end{aligned} \tag{**III**.6.8}$$

Allerdings muss dieses System, das nicht weniger als vier dimensionsbehaftete Parameter enthält, zunächst computergerecht formuliert, also in eine dimensionslose Form gebracht werden. Zu diesem Zweck sei nun a eine „charakteristische Länge" des Systems — also etwa die Amplitude typischer Schwingungen bei der gegebenen Energie E —, mit deren Hilfe die Variablen x und y skaliert (also „dimensionslos gemacht") werden, so dass die Energiefunktion des anharmonischen Oszillators die Form

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2\right) + \alpha a^3\,\frac{x^2 y}{a^3} - \frac{\beta a^3}{3}\left(\frac{y}{a}\right)^3 \tag{**III**.6.9}$$

annimmt. Offensichtlich trägt das Produkt $m\omega^2 a^2$ die Dimension einer Energie. Daher sind alle Terme der damit skalierten Gleichung

$$\frac{E}{m\omega^2 a^2} = \frac{p_x^2}{2(m\omega a)^2} + \frac{p_y^2}{2(m\omega a)^2} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2\right) + A\,\frac{x^2 y}{a^3} - \frac{B}{3}\left(\frac{y}{a}\right)^3 \quad (\textbf{III}.6.10)$$

dimensionlos; die ebenfalls dimensionslosen Koeffizienten

$$A = \frac{\alpha a}{m\omega^2} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{\beta a}{m\omega^2} \quad (\textbf{III}.6.11)$$

beschreiben die Stärken der Anharmonizitäten. Definiert man nun, wie bereits durch den Ansatz intendiert, die dimensionslosen Längenvariablen

$$X = \frac{x}{a} \qquad \text{und} \qquad Y = \frac{y}{a}\,, \quad (\textbf{III}.6.12)$$

so hat man weiterhin sofort auch

$$p_x \;=\; m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; ma\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \;=\; ma\omega\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}(\omega t)}\,. \quad (\textbf{III}.6.13)$$

Diese Kette zeigt, wie die Skalierungsprozedur abzuschließen ist: Durch Einführung der erneut dimensionslosen Impulsvariablen

$$P_X = \frac{p_x}{m\omega a} \quad (\textbf{III}.6.14)$$

und der ebenfalls dimensionslosen Zeitvariablen

$$\tau = \omega t \quad (\textbf{III}.6.15)$$

erhält die Identität (**III**.6.13) die sehr einfache Form

$$P_X = \dot{X}\,, \quad (\textbf{III}.6.16)$$

wobei hier

$$\dot{X} \equiv \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} \quad (\textbf{III}.6.17)$$

die Ableitung der skalierten Koordinate X nach der skalierten Zeitvariablen τ bezeichnet; ebenso erhält man die Beziehung

$$P_Y = \dot{Y}\,. \quad (\textbf{III}.6.18)$$

Gibt man noch die Energie E in Vielfachen von $m\omega^2 a^2$ an, betrachtet also den dimensionslosen Energieparameter

$$\varepsilon = \frac{E}{m\omega^2 a^2}\,, \quad (\textbf{III}.6.19)$$

so erhält man schließlich aus der ursprünglichen Energiefunktion (**III**.6.9) ihr gesuchtes dimensionsloses Pendant

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\big(P_X^2 + P_Y^2\big) + \frac{1}{2}\big(X^2 + Y^2\big) + A\, X^2 Y - \frac{B}{3} Y^3 \,. \qquad (\textbf{III}.6.20)$$

Abgesehen davon, dass alle hierin vorkommenden Größen wie verlangt dimensionslos und damit „computertauglich“ sind, wird durch diese Skalierung auch eine wichtige Einsicht vermittelt: Das zu untersuchende dynamische System hängt nicht, wie es zunächst den Anschein hatte, von vier, sondern lediglich von zwei wesentlichen Parametern ab. Dieses System wurde 1962 von Michel Hénon und Carl Heiles als Modell für die nichtlineare Bewegung eines Sterns um das galaktische Zentrum vorgeschlagen und wird daher in der Literatur als *Hénon-Heiles-Modell* bezeichnet.
Das hier auftretende anharmonische Potential soll im folgenden für die Parameter $A = 1$ und $B = 1$ betrachtet werden, so dass

$$V(X,Y) = \frac{1}{2}\big(X^2 + Y^2\big) + X^2 Y - \frac{1}{3} Y^3 \,. \qquad (\textbf{III}.6.21)$$

Dieses Potential besitzt für $X = Y = 0$ ein Minimum, um das herum stabile Oszillationen stattfinden können. Allerdings lässt sich leicht erkennen, dass Trajektorien mit hoher Energie unbeschränkt sind: Längs der Y-Achse hat man

$$V(0,Y) = \frac{1}{2} Y^2 - \frac{1}{3} Y^3 \,, \qquad (\textbf{III}.6.22)$$

so dass das Potential bei $(0,1)$ einen Sattelpunkt besitzt; wegen

$$V(0,1) = \frac{1}{6} \qquad (\textbf{III}.6.23)$$

bleiben nur für $0 \le \varepsilon \le 1/6$ alle Trajektorien, die in einer Umgebung des Potentialminimums bei $(0,0)$ starten, für alle Zeiten beschränkt.
Die numerische Bestimmung der Phasenraumtrajektorien dieses Modells geht nun aus von dem skalierten System

$$\begin{aligned} \dot{X} &= P_X \\ \dot{Y} &= P_Y \\ \dot{P}_X &= -X - 2XY \\ \dot{P}_Y &= -Y - X^2 + Y^2 \,, \end{aligned} \qquad (\textbf{III}.6.24)$$

das sich problemlos z.B. mit dem RK4-Algorithmus (**III**.5.33) integrieren lässt. Allerdings benötigt man noch eine geeignete Strategie, um das Verhalten der vierdimensionalen Trajektorien $\big(P_X(\tau), P_Y(\tau), X(\tau), Y(\tau)\big)$ in geeigneter Weise sichtbar zu machen. Eine naheliegende Möglichkeit besteht darin, einfach die Impulskomponenten wegzulassen und die Bahnen $\big(X(\tau), Y(\tau)\big)$ in der X-Y-Ebene, also im Ortsraum des Systems aufzuzeichnen. Bewegt sich die Trajektorie dann auf einem erhaltenen KAM-Torus, so erhält man bei hinreichend langer Verfolgung der Trajektorie ein Bild der Projektion dieses Torus

aus dem vierdimensionalen Phasenraum in den zweidimensionalen Ortsraum. Eine andere Möglichkeit, die sich sehr bewährt hat und häufig angewandt wird, besteht in der Anfertigung eines *Poincaré-Schnittes*: Betrachtet man die Koordinaten $P_Y(\tau)$ und $Y(\tau)$ nur zu denjenigen Zeitpunkten τ_0, für die $X(\tau_0) = 0$ gilt, so entspricht das einem zweidimensionalen Schnitt der beiden dreidimensionalen Untermengen $\{H = \varepsilon\}$ und $\{X = 0\}$ im vierdimensionalen Phasenraum $\{(P_X, P_Y, X, Y)\}$. Schnitte erhaltener KAM-Tori mit dieser P_Y-Y-Ebene liefern geschlossene Kurven, die bei hinreichend langer Verfolgung einer Trajektorie punktweise sichtbar werden; chaotische Bewegung muss diese Ebene dagegen "flächig" ausfüllen. Ein Computerprogramm zur Erzeugung von solchen Poincaré-Schnitten für das Hénon-Heiles-System (**III**.6.24) kann daher in folgender Weise aufgebaut sein:

- Eingabe der skalierten Energie $0 < \varepsilon < 1/6$ sowie der Anfangswerte $Y(0)$ und $P_Y(0)$. Legt man weiterhin $X(0) = 0$ fest, so folgt $P_X(0)$ aus der Energieerhaltung.

- Lösung des dynamischen Systems (**III**.6.24) mit dem RK4-Algorithmus (**III**.5.33) für eine geeignete Schrittweite $h = \Delta\tau$. Dabei wird nach jedem Schritt kontrolliert, ob sich das Vorzeichen von $X(\tau_{n+1})$ gegenüber dem von $X(\tau_n)$ geändert hat: Falls ja, wurde die Poincaré-Ebene durchstoßen. Außerdem kann nach jedem Schritt auch die aktuelle Energie berechnet werden, die bei exakter Lösung des Systems (**III**.6.24) konstant bliebe. Auf diese Weise kann die Genauigkeit der numerischen Integration kontrolliert werden: Abweichungen des aktuellen Wertes der Energie von dem eingegebenen Wert von ε sind ein Maß für den numerischen Fehler; werden diese Abweichungen zu groß, muss die Schrittweite reduziert werden.

- Falls die Poincaré-Ebene durchstoßen wurde, muss der genaue Durchstoßpunkt ermittelt werden, der zu $X = 0$ gehört. Dazu bietet es sich an, X als unabhängige Variable zu benutzen, so dass das System (**III**.6.24) die neue Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X} &= 1 \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} &= \frac{1}{P_X} P_Y \\ \frac{\mathrm{d}P_X}{\mathrm{d}X} &= -\frac{1}{P_X}\frac{\partial V}{\partial X} \\ \frac{\mathrm{d}P_Y}{\mathrm{d}X} &= -\frac{1}{P_X}\frac{\partial V}{\partial Y} \end{aligned} \qquad \text{(III.6.25)}$$

  erhält: Damit kann man nun in einem einzigen Schritt vom aktuellen Wert $X(\tau_{n+1})$, der ja nach dem gerade erfolgten Durchstoß in der Nähe von $X = 0$ liegt, zurück zu $X = 0$ gelangen und dann die zugehörigen Werte von P_Y und Y festhalten.

- Diese Schritte werden solange ausgeführt, bis eine vorgegebene Zahl von Durchstoßpunkten erreicht worden ist. Danach kann nach Eingabe neuer Anfangswerte $Y(0)$ und $P_Y(0)$ zum gleichen ε eine weitere Trajektorie berechnet werden.

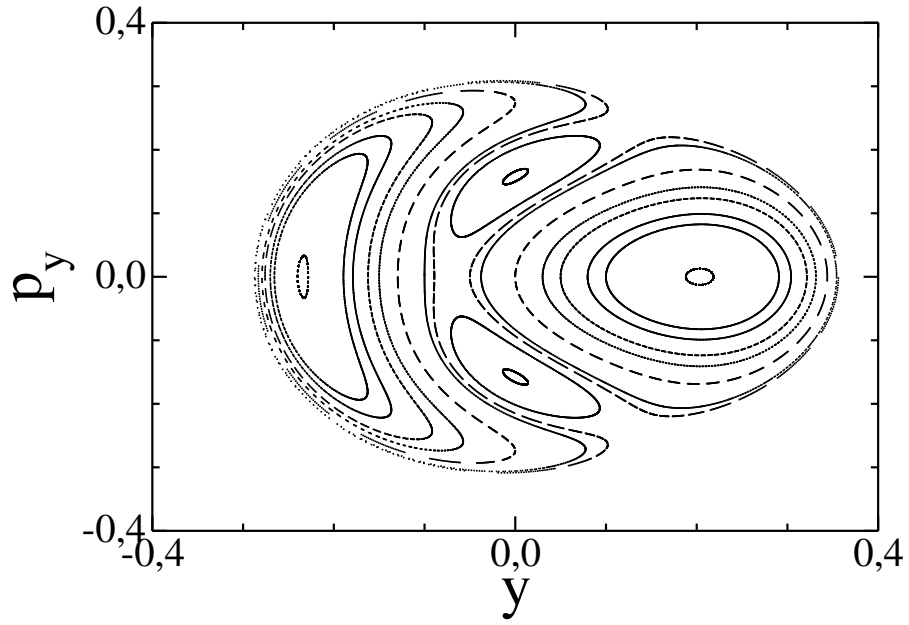

Abbildung **III**.8: Poincaré-Schnitt für das Hénon-Heiles-System (**III**.6.24) mit der Energie $\varepsilon = 0.05$. Erkennbar ist die Existenz von vier verschiedenen stabilen Fixpunkten.

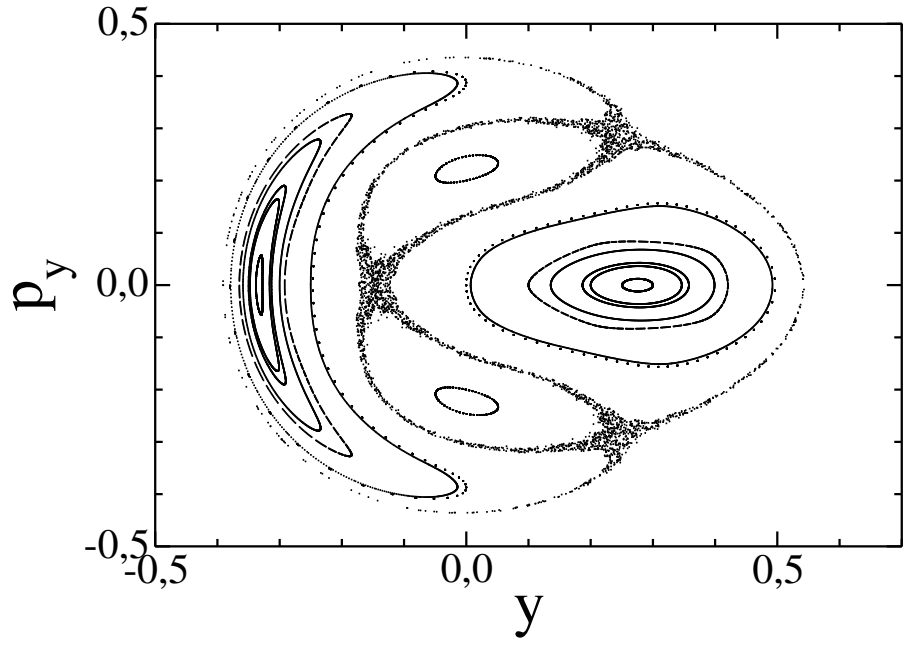

Abbildung **III**.9: Poincaré-Schnitt für das Hénon-Heiles-System (**III**.6.24) mit der Energie $\varepsilon = 0.10$. Im Bereich der Separatrizes wird chaotische Bewegung sichtbar.

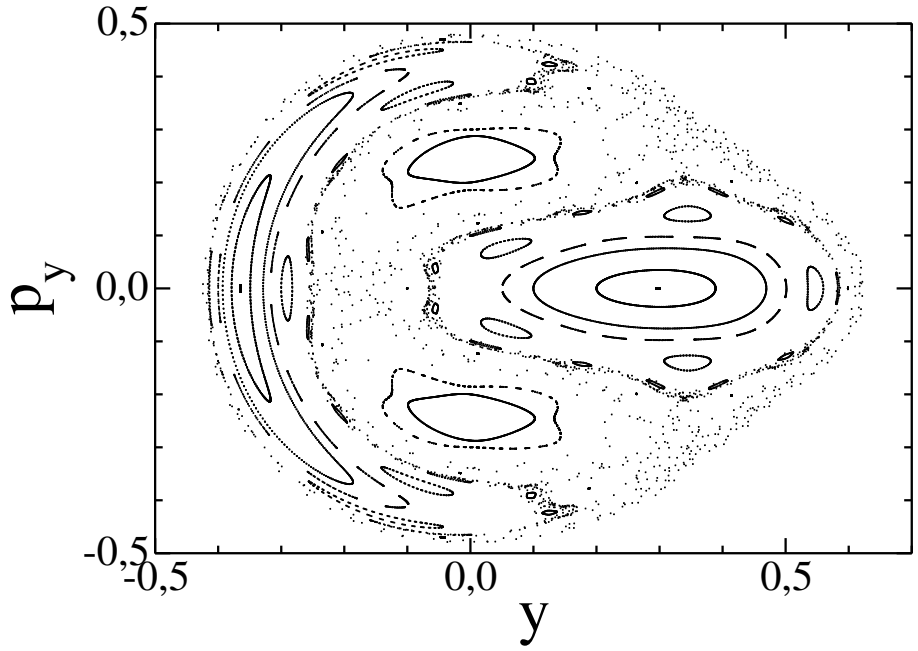

Abbildung **III**.10: Poincaré-Schnitt für das Hénon-Heiles-System (**III**.6.24) mit der Energie $\varepsilon = 0.12$. Mehrere Bifurkationen haben zum Auftreten von „Inselketten“ geführt.

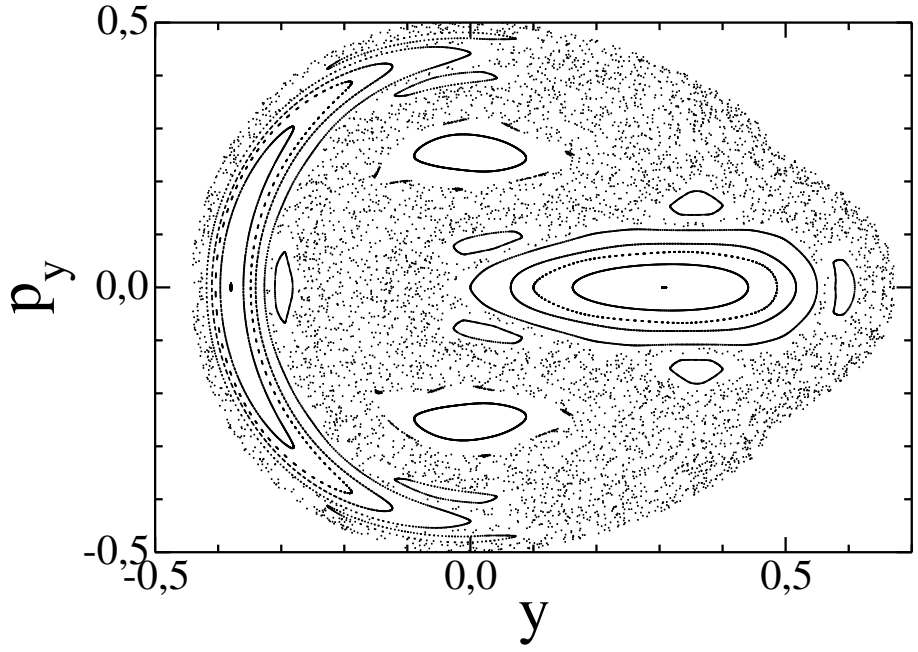

Abbildung **III**.11: Poincaré-Schnitt für das Hénon-Heiles-System (**III**.6.24) mit der Energie $\varepsilon = 0.13$. „Inseln“ regulärer Bewegung sind eingebettet in einen „stochastischen See“.

Die Abbildungen **III**.8 – **III**.11 zeigen Beispiele für Poincaré-Schnitte[14] bei verschiedenen (skalierten) Energien ε. Um diese Schnitte zu berechnen, wurden jeweils 10 Trajektorien mit der Schrittweite $h = 0.01$ so lange verfolgt, bis 2000 Durchstoßpunkte erreicht waren. Bei der relativ kleinen Energie $\varepsilon = 0.05$ scheint die Bewegung noch sehr weitgehend regulär zu sein, allerdings lässt der Schnitt in Abbildung **III**.8 sogar vier stabile Fixpunkte erkennen. Die Phasenraumbereiche, die zu Oszillationen um diese Fixpunkte gehören, müssen durch Separatrizes voneinander getrennt sein. Abbildung **III**.9 wurde für $\varepsilon = 0.10$ angefertigt; aufgrund dieser größeren Energie können die Trajektorien die Anharmonizität des Potentials nun stärker spüren. Die ersten Anzeichen von chaotischer Bewegung werden längs der Separatrizes sichtbar; insbesondere zeigt sich das erwartete Ausfüllen von Flächen im Bereich der instabilen Fixpunkte. Bei der in Abbildung **III**.10 betrachtete Energie $\varepsilon = 0.12$ sind offenbar bereits mehrere Bifurkationen aufgetreten; zu den ursprünglichen Fixpunkten sind eine Reihe weiterer hinzugekommen. Insbesondere ist auch der Bereich chaotischer Bewegung deutlich größer geworden. Abbildung **III**.11 zeigt schließlich für $\varepsilon = 0.13$ in besonders markanter Weise das für klassische mechanische Systeme typische Nebeneinander von Ordnung und Chaos: „Inseln“ regulärer Bewegung sind eingebettet in einen „stochastischen See“.

IV Vektoranalysis

Bereits in Abschnitt **II**.5 wurden *Kurvenintegrale* berechnet, also Integrale eines gegebenen Vektorfeldes längs einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. In ähnlicher Weise lassen sich auch *Flächenintegrale* und *Volumenintegrale* definieren. Von besonderer Wichtigkeit etwa für die Elektrodynamik ist die Tatsache, dass Beziehungen zwischen diesen Integraltypen existieren, dass also z.B. ein Integral über ein Volumen in ein Flächenintegral über die Oberfläche dieses Volumens umgewandelt werden kann. Das genaue Verständnis dieser „Integralsätze“ ist Ziel dieses vierten Kapitels der Vorlesung. Eine zentrale Rolle wird dabei der Nabla-Operator spielen, der zuvor in Abschnitt **III**.2 lediglich als schreibtechnisch bequeme Abkürzung eingeführt worden war, tatsächlich aber eine weit größere differentialgeometrische Bedeutung besitzt.

[14] *Nach Wikipedia:* Jules Henri Poincaré (geb. am 29. April 1854 in Nancy; gest. am 17. Juli 1912 in Paris) war ein bedeutender französischer Mathematiker, theoretischer Physiker, theoretischer Astronom und Philosoph. Poincarés Werk zeichnet sich durch Vielfalt und hohe Originalität aus; zu seiner außergewöhnlichen mathematischen Begabung kam auch ein hohes Maß an Intuition, doch auch Zurückhaltung. Auf mathematischem Gebiet entwickelte er die Theorie der automorphen Funktionen und gilt als Begründer der algebraischen Topologie. Weitere seiner Arbeitsgebiete in der Reinen Mathematik waren die algebraische Geometrie und die Zahlentheorie. Auch die Angewandte Mathematik profitierte von Poincarés Ideenreichtum. Auf dem Gebiet der Physik reichen seine Beiträge von Optik bis Elektrizität, von Quanten- bis Potentialtheorie, von Thermodynamik bis spezieller Relativitätstheorie, die er mitbegründete. Auf dem Gebiet der Erkenntnistheorie (Philosophie) leistete Poincaré u.a. mit seinem Werk *Wissenschaft und Hypothese* bedeutende Beiträge zum Verständnis der Relativität von Theorien: Im benannten Werk stellt Poincaré verschiedene geometrische Systeme vor, die allesamt logisch kohärent sind, einander aber widersprechen — wodurch eine in sich widersprüchliche Mathematik entsteht, die sich selbst verneint. Da dem so sei, bleibe als Erklärung nur, dass Mathematik eben nicht naturwissenschaftlich sei, sondern lediglich Definitionen liefere.

IV.1 grad, div und rot

Die Taylorreihe (**I**.3.4) einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt eine Verallgemeinerung für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die in der Analysis behandelt wird. Entwickelt man eine differenzierbare Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ um einen Punkt $\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\big)$, so hat man

$$f(x_1, x_2, x_3) = f\big(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\big) + \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(0)} (x_i - x_i^{(0)}) + \mathcal{O}\big((x_i - x_i^{(0)})^2\big) \ . \quad (\mathbf{IV}.1.1)$$

Der lineare Term dieser Entwicklung lässt sich nun auffassen als das Skalarprodukt des „Verschiebevektors“ $\Delta\vec{r}$ mit den Komponenten $x_i - x_i^{(0)}$ und eines Vektors mit den Komponenten $\partial f/\partial x_i$, ausgewertet am Entwicklungspunkt. Wie bereits aus Abschnitt **III**.2 bekannt, wird dieser Vektor als *Gradient* der Funktion f bezeichnet:

$$(\mathrm{grad}\, f)_i \ = \ (\vec{\nabla} f)_i \ = \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \ . \quad (\mathbf{IV}.1.2)$$

Man schreibt daher kurz

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \left.\vec{\nabla} f\right|_{\vec{r}_0} \cdot \Delta\vec{r} + \ \ldots \ \ . \quad (\mathbf{IV}.1.3)$$

Formal wird dabei das Gradientenfeld $\vec{\nabla} f$ durch die Anwendung des Nabla-Operators

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \quad (\mathbf{IV}.1.4)$$

auf die skalare Funktion $f(\vec{r})$ gebildet. Hier werden kartesische Koordinaten vorausgesetzt, so dass

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \ ; \quad (\mathbf{IV}.1.5)$$

mit Hilfe der allgemeinen Beziehung (**IV**.1.3) lässt sich $\vec{\nabla} f$ jedoch auch in krummlinigen Koordinaten definieren. *(Übungsaufgabe!)* Legt man nun $\Delta\vec{r}$ in eine Richtung, in der sich f nicht verändert, so erhält man

$$\vec{\nabla} f \cdot \Delta\vec{r} = 0 \ , \quad (\mathbf{IV}.1.6)$$

so dass der Vektor $\vec{\nabla} f$ *senkrecht* auf den Flächen $f = const.$ steht. Sein Betrag gibt die „Stärke der Veränderung“ von f senkrecht zu den Konstanzflächen an, entsprechend der „Dichte der Höhenlinien“ in einer Konturdarstellung.
Wichtig ist z.B. der Ausdruck

$$\vec{\nabla} r \ = \ \frac{\vec{r}}{r} \ = \ \vec{e}_r \ . \quad (\mathbf{IV}.1.7)$$

Außerdem hat man für eine nur von der Radialkoordinate r abhängige Funktion f die Kettenregel

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(r) &= f'(r)\,\vec{\nabla} r \\ &= f'(r)\,\vec{e}_r\ ;\end{aligned} \tag{**IV**.1.8}$$

damit erhält man z.B.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\frac{1}{r} &= -\frac{1}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3}\ .\end{aligned} \tag{**IV**.1.9}$$

Man kann den Nabla-Operator weiterhin im Sinne des Skalarproduktes auf ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ anwenden, d.h. man bildet

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\ ; \tag{**IV**.1.10}$$

dieser Ausdruck wird als *Divergenz* des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ bezeichnet:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\ . \tag{**IV**.1.11}$$

■ **Beispiel:** Die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r}$

Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention findet man sofort

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{r} &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\,x_i \\ &\equiv \partial_i x_i \\ &= 3\ .\end{aligned}$$

Dieses Resultat geht auch in das folgende Beispiel ein. ■

■ **Beispiel:** Die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}$

Für $r \neq 0$ erhält man mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel die Identität

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} &= \partial_i\left(\frac{x_i}{r^3}\right) \\ &= \frac{\partial_i x_i}{r^3} + x_i\,\partial_i\frac{1}{r^3} \\ &= \frac{3}{r^3} + x_i\left(-\frac{3}{r^4}\right)\partial_i r \\ &= \frac{3}{r^3} + x_i\left(-\frac{3}{r^4}\right)\frac{x_i}{r} \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis mag überraschend erscheinen: Bekanntlich ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (\mathbf{IV}.1.12)$$

das elektrische Feld einer Punktladung q, die im Ursprung ruht. Andererseits hat man die Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\ ,$$

die ein elektrisches Feld $\vec{E}$ auf die Ladungsdichte ϱ zurückführt. Die vorherige Rechnung zeigt also, dass die zu dem Feld (**IV**.1.12) gehörige Ladungsdichte für alle $r \neq 0$ verschwindet, also auf den Punkt $\vec{r} = \vec{0}$ konzentriert sein muss. Einserseits entpricht das zwar der Idee einer „Punktladung“, andererseits ergibt sich hier ein formales Problem: Das Integral über die Ladungsdichte muss die Gesamtladung ergeben, hier also q. In der klassischen Analysis liefert das Integral über eine Funktion, die nur an einer einzigen Stelle von Null verschieden ist, immer den Wert Null. Damit verlangt die Beschreibung der Ladungsdichte einer Punktladung offenbar eine „Funktion“, die es im Rahmen der klassischen Analysis nicht gibt. ■

Um das hinter dem Divergenzbegriff stehende Konzept auch anschaulich zu verstehen, wird nun der „Fluss“ eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ durch ein kleines quaderförmiges Volumen $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ mit Begrenzungsflächen parallel zu den Achsen berechnet: Durch die rechte, bei $x + \Delta x, y, z$ gelegene Begrenzungsfläche hat man den austretenden Fluss $v_x(x+\Delta x, y, z)\Delta y\Delta z$, durch die linke Fläche bei x, y, z den in ΔV hineinführenden Fluss $v_x(x, y, z)\Delta y\Delta z$. Die Differenz „Abstrom minus Zustrom“ in x-Richtung ergibt sich daher in linearer Näherung zu

$$\Big(v_x(x+\Delta x, y, z) - v_x(x, y, z)\Big)\Delta y\Delta z \approx \frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z\ . \qquad (\mathbf{IV}.1.13)$$

Betrachtet man in gleicher Weise auch noch die ein- und austretenden Flüsse längs der y- und der z-Richtung, so ergibt sich für das betrachtete Volumen ΔV insgesamt die „Quellstärke“

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \\ &= \operatorname{div}\vec{v}\ \Delta V\ . \end{aligned} \qquad (\mathbf{IV}.1.14)$$

Das ermöglicht nun eine sogar *koordinatenunabhängige* Definition der Divergenz als eine „lokale Quellstärke pro Volumen“:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial(\Delta V)} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{v}} \qquad (\mathbf{IV}.1.15)$$

Dabei bezeichnet das Integral auf der rechten Seite den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch die Oberfläche $\partial(\Delta V)$ des nun beliebig geformten Volumens ΔV.

Diese Beziehung kann z.B. auch auf $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{a}\varphi(\vec{r})$ mit einem beliebigen, aber *konstanten* Vektor $\vec{a}$ und einem Skalarfeld $\varphi(\vec{r})$ angewandt werden: Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{a}\varphi) &= \partial_i(a_i\varphi) \\ &= a_i\partial_i\varphi \\ &= \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\varphi\,, \end{aligned} \tag{**IV**.1.16}$$

so dass

$$\vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial(\Delta V)}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{a}\varphi\,. \tag{**IV**.1.17}$$

Weil diese Gleichung nun für *alle* Vektoren $\vec{a}$ gilt, folgt daraus eine Integraldarstellung des Gradienten:

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial(\Delta V)}\mathrm{d}\vec{f}\,\varphi} \tag{**IV**.1.18}$$

Für differenzierbare Funktionen φ reduziert sich das in kartesischen Koordinaten auf die bekannte Darstellung

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \tag{**IV**.1.19}$$

und kann andernfalls als *Definition* des Gradienten aufgefasst werden.
Schließlich gibt es noch die Möglichkeit, den Nabla-Operator im Sinne des Kreuzproduktes mit einem Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ zu verknüpfen. Das liefert die ebenfalls schon aus Abschnitt **III**.2 bekannte *Rotation* von $\vec{v}$:

$$\operatorname{rot}\vec{v} \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{v} \;=\; \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\partial_y v_z-\partial_z v_y\\ \partial_z v_x-\partial_x v_z\\ \partial_x v_y-\partial_y v_x\end{pmatrix}\,. \tag{**IV**.1.20}$$

Dieser Ausdruck lässt sich in eine sehr kompakte Form bringen, wenn man den *vollständig antisymmetrischen Tensor dritter Stufe* einführt, der auch als *Epsilon-Tensor* oder *Levi-Civita-Symbol* bekannt ist:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & , \text{ falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist;}\\ -1 & , \text{ falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist;}\\ 0 & , \text{ sonst.}\end{cases} \tag{**IV**.1.21}$$

Unter erneuter Verwendung der Summenkonvention reduziert sich die explizite Darstellung (**IV**.1.20) damit auf die Kurzform

$$(\operatorname{rot}\vec{v})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j v_k\,. \tag{**IV**.1.22}$$

Abbildung **IV**.1: Ist $\vec{\omega}$ ein konstanter Vektor, der senkrecht aus der Abbildungsebene herausragt, so ist das Feld $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ein in dieser Ebene liegendes zirkulares Wirbelfeld, dessen Wirbelstärke durch den Betrag $|\vec{\omega}|$ beschrieben wird.

Für die Auswertung von „doppelten Kreuzprodukten“ mit dem Epsilon-Tensor gibt es noch eine wichtige Beziehung, die man leicht kombinatorisch aus der Definition (**IV**.1.21) erschließen kann: *(Übungsaufgabe!)*

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \; . \qquad (\mathbf{IV}.1.23)$$

■ **Beispiel:** Die Rotation des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Um den Begriff „Rotation“ zu rechtfertigen, soll nun das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

betrachtet werden. Wie die Abbildung **IV**.1 verdeutlicht, ist dieses Vektorfeld ein reines Wirbelfeld, dessen *Wirbelstärke* durch den Betrag $|\vec{\omega}|$ bestimmt wird. Mit Hilfe der Identität (**IV**.1.23) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\,\vec{\omega} \times \vec{r})_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\omega_l r_m \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\omega_l\partial_j r_m \\
&= \big(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\big)\omega_l\partial_j r_m \\
&= \omega_i\partial_j r_j - \omega_j\partial_j r_i \\
&= 3\omega_i - \omega_j\delta_{ij} \\
&= 2\omega_i \; ,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{\omega} \times \vec{r} = 2\vec{\omega} \; . \qquad (\mathbf{IV}.1.24)$$

Die Operation „rot“ isoliert also die hier konstante Wirbelstärke des Feldes. In Verallgemeinerung dieses Beispiels wird $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ auch für ein beliebiges (differenziebares) Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ als „lokale Wirbelstärke“ bezeichnet. ■

Die Interpretation der Rotation als eine orientierte lokale Wirbelstärke wird auch gestützt durch die Integraldarstellung der Rotation: Zunächst gilt für einen erneut beliebigen, aber konstanten Vektor $\vec{a}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{v}) &= \partial_i\epsilon_{ijk}a_j v_k \\ &= -a_j\epsilon_{jik}\partial_i v_k \\ &= -\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v}\,. \end{aligned} \tag{**IV**.1.25}$$

Die Integraldarstellung (**IV**.1.15) der Divergenz liefert also nun

$$\begin{aligned} -\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v} &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial(\Delta V)}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{a}\times\vec{v} \\ &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial(\Delta V)}\vec{a}\cdot\vec{v}\times\mathrm{d}\vec{f} \\ &= -\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\vec{a}\cdot\int_{\partial(\Delta V)}\mathrm{d}\vec{f}\times\vec{v}\,. \end{aligned} \tag{**IV**.1.26}$$

Da diese Gleichung wiederum für alle konstanten Vektoren $\vec{a}$ gilt, hat man die gesuchte Integraldarstellung

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial(\Delta V)}\mathrm{d}\vec{f}\times\vec{v}} \tag{**IV**.1.27}$$

Schließlich sollen noch zwei einfache, aber sehr wichtige Zusammenhänge formuliert werden: Es gilt

$$(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = 0 \tag{**IV**.1.28}$$

wegen der Symmetrie $\partial_j\partial_k = \partial_k\partial_j$ und der Antisymmetrie von ε_{ijk}, d.h. „Gradientenfelder sind wirbelfrei“.
Mit dem gleichen Argument erhält man auch

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = \partial_i\epsilon_{ijk}\partial_j v_k = 0\,, \tag{**IV**.1.29}$$

d.h. „Wirbelfelder sind quellenfrei“.

IV.2 Flächen- und Volumenintegrale

Gegeben seien ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ und ein glattes Flächenstück F. Dann kann man, wie es bereits bei der Begründung der Integraldarstellung (**IV**.1.15) der Divergenz in elementarer Weise geschehen ist, den *Fluss* Φ von $\vec{v}$ durch F berechnen, d.h. das *Flächenintegral* des Feldes $\vec{v}$ über die Fläche F:

$$\Phi = \int_F \mathrm{d}\vec{f}(\vec{r})\cdot\vec{v}(\vec{r})\,. \tag{**IV**.2.1}$$

Abbildung **IV**.2: Wird eine Fläche durch eine Gleichung $z = z(x, y)$ gegeben und liefern daher die kartesischen Koordinaten x und y eine Parametrisierung, so ergibt sich der Integrationsbereich zur Berechnung des Flächenintegrals (**IV**.2.1) durch Projektion der Fläche in die x-y-Ebene. Das entspricht einer Projektion der Vektoren $\mathrm{d}\vec{f}(\vec{r})$ der lokalen Flächenelemente auf den Normalenvektor $\vec{e}_z$ der x-y-Ebene.

Dazu benötigt man zunächst eine analytische Darstellung der Fläche, also eine Parametrisierung, die zwei geeigneten Koordinaten einen Punkt auf F zuordnet. In vielen Fällen eignen sich bereits die kartesischen Koordinaten x und y als Parameter; die Fläche wird dann durch eine Funktion $z = z(x, y)$ gegeben. Der Vektor $\mathrm{d}\vec{f}(\vec{r})$ des „Flächenelementes“ steht im Punkt $\vec{r}$ senkrecht auf F; sein Betrag gibt die Größe dieses Elementes an. Man schreibt also

$$\mathrm{d}\vec{f}(\vec{r}) = |\mathrm{d}\vec{f}(\vec{r})|\ \vec{n}(\vec{r})\ , \tag{**IV**.2.2}$$

wobei der normierte Vektor $\vec{n}(\vec{r})$ die Richtung der Flächennormalen und damit die Orientierung des Fächenelementes im Raum festlegt.
Für eine Fläche, die durch eine Gleichung der Form $z = z(x, y)$ festgelegt wird, lässt sich aus der Abbildung **IV**.2 ablesen, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= |\mathrm{d}\vec{f}|\ |\cos(\alpha)| \\ &= |\mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{e}_z| \\ &= |\mathrm{d}\vec{f}|\ |\vec{n}\cdot\vec{e}_z|\ . \end{aligned} \tag{**IV**.2.3}$$

Damit lässt sich das Flächenintegral (**IV**.2.1) nun unmittelbar auf ein Doppelintegral über x und y zurückführen:

$$\Phi = \int_{F_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \frac{\vec{v}\big(x, y, z(x, y)\big)\cdot\vec{n}\big(x, y, z(x, y)\big)}{|\vec{e}_z\cdot\vec{n}\big(x, y, z(x, y)\big)|}\ , \tag{**IV**.2.4}$$

wobei der Integrationsbereich F_{xy} durch die Projektion der Fläche F in die x-y-Ebene bestimmt wird.

Abbildung **IV**.3: Die Ebene, die durch die Gleichung $2x+2y+z=6$ bestimmt wird, lässt sich besonders einfach mit Hilfe ihrer drei Achsabschnitte $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ und $(0,0,6)$ festlegen. Der schraffierte Bereich F_{xy} bezeichnet die Projektion desjenigen Teiles dieser Ebene, der im ersten Oktanden liegt, auf die x-y-Ebene.

■ **Beispiel:** Fluss durch eine Ebene.

Betrachtet werden das Vektorfeld

$$\vec{v} = (4z, 1, 2x)$$

sowie das Flächenstück F, das durch den im ersten Oktanden liegenden Teil der Ebene $2x+2y+z=6$ gegeben wird. Wie lautet der Fluss von $\vec{v}$ durch F, also das Flächenintegral von $\vec{v}$ über F ?
Eine Parametrisierung der Fläche erhält man hier sofort durch

$$z(x,y) = 6 - 2x - 2y \ ,$$

wobei (x,y) aus dem in Abbildung **IV**.3 schraffierten Bereich F_{xy} stammt. Die Fläche F selbst ist eine Konstanzfläche der Funktion

$$\psi(x,y,z) = 2x + 2y + z \ ,$$

deren Gradient

$$\vec{\nabla}\psi = (2,2,1)$$

auf F senkrecht steht; die (konstante) Flächennormale ist also

$$\vec{n} = (2/3, 2/3, 1/3) \ .$$

Da nun $\vec{e}_z \cdot \vec{n} = 1/3$, liefert die vorherige Beziehung (**IV**.2.4) für den gesuchten Fluss sofort den konkreten Ausdruck

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{F_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \begin{pmatrix} 4(6-2x-2y) \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \int_{F_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, (50 - 14x - 16y) \ . \end{aligned}$$

Der Integrationsbereich F_{xy} ist ein Dreieck, das durch die Gerade $x+y=3$ aus dem ersten Quadranten herausgeschnitten wird. Integriert man z.B. zuerst über x, so ist $0 \le x \le 3-y$; anschließend läuft y von 0 bis 3:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^3 \mathrm{d}y \int_0^{3-y} \mathrm{d}x \, \big(50 - 14x - 16y\big) \\
&= \int_0^3 \mathrm{d}y \, \Big(50x - 7x^2 - 16xy\Big)_{x=0}^{x=3-y} \\
&= \int_0^3 \mathrm{d}y \, \Big(50(3-y) - 7(3-y)^2 - 16(3-y)y\Big) \\
&= \int_0^3 \mathrm{d}y \, \big(150 - 50y - 63 + 42y - 7y^2 - 48y + 16y^2\big) \\
&= \int_0^3 \mathrm{d}y \, \big(87 - 56y + 9y^2\big) \\
&= \Big(87y - 28y^2 + 3y^3\Big)_0^3 \\
&= 261 - 252 + 81 \\
&= 90 \, .
\end{aligned}$$

Die Rechnung wird deswegen etwas mühsam, weil die obere Grenze der ersten Integration über x von der zweiten Integrationsvariablen y abhängt, so dass die beiden Integrationen nicht unabhängig voneinander ausgeführt werden können. ■

■ **Beispiel:** Fluss durch eine Kugeloberfläche.

Ein beliebiges Vektorfeld $\vec{v}$ soll über die Oberfläche einer Kugel vom Radius R integriert werden. Dazu wird man zweckmäßigerweise sphärische Polarkoordinaten r, ϑ, φ benutzen, so dass $r = R$ fest und $\vec{v} = \vec{v}(\vartheta, \varphi)$ eine Funktion der beiden Polarwinkel ist. Der Normalenvektor der Kugel ist stets radial nach außen gerichtet,

$$\vec{n} \;=\; \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \; ;$$

insbesondere ist $\vec{e}_z \cdot \vec{n} = \cos\vartheta$. Schließlich wird das kartesische Flächenelement $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ „auf ϑ und φ transformiert“. Dazu benutzt man die *Transformationsformel* der Analysis, die bei mehrdimensionalen Integralen die Substitutionsregel ersetzt: Man schreibt formal

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\vartheta,\varphi)}\right| \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \; ,$$

wobei das hier auftauchende Symbol $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\vartheta,\varphi)}$ die *Funktionaldeterminante* für diesen Varia-

blenwechsel bezeichnet:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\vartheta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} .$$

Mit $x = R\sin\vartheta\cos\varphi$ und $y = R\sin\vartheta\sin\varphi$ ergibt sich dafür der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\vartheta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi & -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= R^2\sin\vartheta\cos\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \ , \end{aligned}$$

so dass nun der Fluss anhand der Bestimmungsgleichung (**IV**.2.4) berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \ \frac{\vec{v}(\vartheta,\varphi)\cdot\vec{e}_r}{|\cos\vartheta|} \ |R^2\sin\vartheta\cos\vartheta| \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \ \sin\vartheta \, v_r(\vartheta,\varphi) \ . \end{aligned} \qquad (\mathbf{IV}.2.5)$$

Man kann daher den Ausdruck $R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ als Fächenelement auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R erkennen. Ist nun z.B. $v_r = 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} \Phi &= R^2 \ 2\pi\Big(-\cos\vartheta\Big)_0^{\pi} \\ &= 4\pi R^2 \ , \end{aligned}$$

also die Kugeloberfläche. Betrachtet man andererseits noch einmal das Feld $\vec{v} = (4z, 1, 2x)$ aus dem vorherigen Beispiel, so ist

$$\begin{aligned} \vec{v}\cdot\vec{e}_r &= \begin{pmatrix} 4R\cos\vartheta \\ 1 \\ 2R\sin\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= 6R\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi \quad . \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \ \cos\varphi \ = \ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \ \sin\varphi \ = \ 0 \ ,$$

so dass

$$\Phi \ = \ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \ \sin\vartheta \ \vec{v}\cdot\vec{e}_r \ = \ 0 \ .$$

Das ist nicht überraschend: In kartesischen Koordinaten erkennt man sofort $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. Das Feld $\vec{v}$ besitzt also keine Quellen; der mit dem Feld $\vec{v}$ verbundene „Zustrom“ in die Kugel ist daher genauso groß wie der „Abstrom“. ■

Dieses zweite Beispiel zeigt auch, dass die Bestimmungsgleichung (**IV**.2.4) unbequem wird, sobald nicht zwei der drei kartesischen Koordinaten, sondern andere Parameter zur Beschreibung der Integrationsfläche F herangezogen werden. Es ist daher sinnvoll, die Berechnung eines Flussintegrals Φ in einer Weise zu formulieren, die von einer *beliebigen* Parametrisierung von F ausgeht: Allgemein lässt sich eine solche Parametrisierung in der Form

$$(s,t) \to \vec{r}(s,t)\ , \qquad (s,t) \in D \tag{**IV**.2.6}$$

angeben, also in Form einer Vorschrift, die zwei Parametern s und t einen Punkt $\vec{r}(s,t)$ auf der Fläche zuordnet. Bei einer infinitesimalen Änderung dieser Parameter ändert sich der zugehörige Punkt in der Fläche gemäß dem Differential

$$\mathrm{d}\vec{r}(s,t) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\mathrm{d}t\ , \tag{**IV**.2.7}$$

wobei die normierten Vektoren

$$\vec{e}_s = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\right|} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_t = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right|} \tag{**IV**.2.8}$$

die lokalen Einheitsvektoren an die Fläche entlang der Koordinatenlinien $s = const.$ bzw. $t = const.$ bilden. Das lokale Flächenelement besitzt daher die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{f} &= \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\mathrm{d}s\right) \times \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\mathrm{d}t\right) \\ &= \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t\ , \end{aligned} \tag{**IV**.2.9}$$

da ja das Kreuzprodukt auf den beiden lokalen Einheitsvektoren und damit auf der Fläche senkrecht steht; sein Betrag gibt die Größe des Elementes an. Allerdings ist die Reihenfolge der beiden Faktoren im Kreuzprodukt zunächst nicht festgelegt. Die Frage, ob s die „erste“ und t die „zweite“ Koordinate darstellt oder ob die andere Reihenfolge benutzt werden soll, entscheidet über die Richtung der Flächennormalen und damit über die mathematische Orientierung der Fläche. Während das für Flächen mit Rand weniger wichtig ist, gibt es für *geschlossene* Flächen, die den dreidimensionalen Raum in einen endlichen „Innenraum“ und einen unendlichen „Außenraum“ zerlegen, eine verbindliche Regel: Der Normalenvektor geschlossener Flächen soll stets *nach außen* weisen.
Damit ergibt sich für eine beliebige Parametrisierung (**IV**.2.6) die folgende konkrete Vorschrift für die Berechnung eines Flussintegrals (**IV**.2.1):

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_F \mathrm{d}\vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}) \\ &= \int_D \vec{v}\big(\vec{r}(s,t)\big) \cdot \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t\ , \end{aligned} \tag{**IV**.2.10}$$

wobei D denjenigen Bereich bezeichnet, den die Parameter s, t durchlaufen müssen, um jeden Punkt auf der Fläche zu erreichen.

■ **Beispiel:** Fluss durch eine Kugeloberfläche.

Das vorherige Beispiel wird noch einmal aufgegriffen: Es soll der Fluss eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius R berechnet werden, wobei nun die Polarwinkel ϑ und φ die Rolle der Parameter s und t in dem Ausdruck (**IV**.2.10) übernehmen. Die allgemeine Parametrisierung (**IV**.2.6) erhält hier also die konkrete Form

$$\vec{r}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} ,$$

wobei der Bereich D durch $0 \le \vartheta \le \pi$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$ gegeben wird. Tangentialvektoren an die Kugel ergeben sich aus den beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} = R\,\vec{e}_\vartheta$$

und

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi ;$$

daraus folgt der benötigte Normalenvektor:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{f} &= \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\ &= \vec{e}_\vartheta\times\vec{e}_\varphi\,R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\ &= \vec{e}_r\,R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi . \end{aligned}$$

Da $\vec{e}_\vartheta\times\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r$, und dieser radiale Einheitsvektor nach außen weist, wurde die Reihenfolge der Faktoren im Kreuzprodukt richtig gewählt. Damit liefert die allgemeine Darstellung (**IV**.2.10) hier sofort das Resultat

$$\Phi = R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\,v_r(\vartheta,\varphi) .$$

Das stimmt überein mit dem Ausdruck (**IV**.2.5), der im vorherigen Beispiel allerdings nur mit Hilfe eines Umweges über die „kartesische“ Darstellung (**IV**.2.4) gewonnen werden konnte. ■

Während also für die Berechnung von Flächenintegralen zunächst eine Parametrisierung (**IV**.2.6) der betrachteten Integrationsfläche benötigt und damit das Flächenintegral auf ein Doppelintegral über die benutzten Parameter zurückgeführt wird, verlangt die Berechnung des *Volumenintegrals* eines skalaren Feldes $\varphi(\vec{r})$ über ein Volumen V, also eines Ausdrucks der Form

$$\int_V \mathrm{d}^3r\,\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V\,\varphi(\vec{r}) , \qquad (\mathbf{IV}.2.11)$$

eine entsprechende „dreidimensionale“ Parametrisierung

$$(s,t,u) \to \vec{r}(s,t,u)\ , \qquad (s,t,u) \in D \tag{**IV**.2.12}$$

des Integrationsvolumens, um das Volumenintegral durch ein Dreifachintegral über die Parameter ausdrücken zu können. Falls man sogar die kartesischen Koordinaten x, y, z selbst als Parameter verwenden kann, muss die Form des Volumens vollständig durch die Integrationsgrenzen beschrieben werden.

■ **Beispiel:** Ein Volumenintegral in kartesischen Koordinaten.

Gegeben ist das skalare Feld $\varphi(\vec{r}) = xyz$. Welchen Wert besitzt dann dann das Volumenintegral (**IV**.2.11) für das Volumen V, das im ersten Oktanden unterhalb der Ebene $2x + 2y + z = 6$ liegt?
Das Integrationsvolumen ist in der Abbildung **IV**.3 zu erkennen: Führt man bei festgehaltenen x, y zunächst die Integration über z aus, so läuft z von Null bis zu der begrenzenden Ebene, also $0 \le z \le 6 - 2x - 2y$. Folgt dann das y-Integral, so läuft y bei festem x bis zu der Geraden $x + y = 3$, also $0 \le y \le 3 - x$. Schließlich bleibt die x-Integration mit $0 \le x \le 3$:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}^3r\,\varphi(\vec{r}) &= \int_0^3 \mathrm{d}x\,x \int_0^{3-x} \mathrm{d}y\,y \int_0^{6-2x-2y} \mathrm{d}z\,z \\ &= \int_0^3 \mathrm{d}x\,x \int_0^{3-x} \mathrm{d}y\,y\,\frac{1}{2}\big(6-2x-2y\big)^2\ .\end{aligned}$$

Offenbar ist es sinnvoll, hier die neue Integrationsvariable $\widetilde{y} = 2y + 2x - 6$ einzuführen, um die Auswertung des Quadrates sowie die mühevollen nachfolgenden Integrationen der resultierenden einzelnen Terme umgehen zu können. Man erhält dann weiter

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}^3r\,\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{8}\int_0^3 \mathrm{d}x\,x \int_{2x-6}^0 \mathrm{d}\widetilde{y}\,\left(\widetilde{y}^3 - (2x-6)\widetilde{y}^2\right) \\ &= -\frac{1}{8}\int_0^3 \mathrm{d}x\,x\left(\frac{1}{4}(2x-6)^4 - \frac{1}{3}(2x-6)^4\right) \\ &= \frac{1}{8\cdot 12}\int_0^3 \mathrm{d}x\,x\big(2x-6\big)^4\ .\end{aligned}$$

Substituiert man nun noch $\widetilde{x} = 2x - 6$, erhält man endlich

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}^3r\,\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{32\cdot 12}\int_{-6}^0 \mathrm{d}\widetilde{x}\,\left(\widetilde{x}^5 + 6\widetilde{x}^4\right) \\ &= \frac{1}{2^7\cdot 3}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)\big(2\cdot 3\big)^6 \\ &= \frac{81}{20}\ .\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt erneut, dass die Auswertung von Mehrfachintegralen technisch aufwändig werden kann, wenn die Form der Berandung des Integrationsgebietes keine Faktorisierung in unabhängige einfache Integrale zulässt. ■

Im Falle einer allgemeinen Parametrisierung (**IV**.2.12) benötigt man wieder die Transformationsformel, um das Volumenelement in den jeweiligen Koordinaten auszudrücken. Zwei *sehr* häufig vorkommende Fälle *(Übungsaufgabe!)* verdienen ganz besondere Hervorhebung:
Für den Wechsel von kartesischen auf zylindrische Koordinaten findet man

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \;=\; \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \;=\; r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\;; \qquad (\mathbf{IV}.2.13)$$

der Wechsel von kartesischen Koordinaten zu sphärischen Polarkoordinaten wird beschrieben durch

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \;=\; \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \;=\; r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\;. \qquad (\mathbf{IV}.2.14)$$

■ **Beispiel:** Konvergenz von Volumenintegralen.

Sie nun $\varphi(\vec{r}) = 1/r^n$ und V eine Kugelschale mit Innenradius r_i und Außenradius r_a. Dann gilt für $n \neq 3$ die Identität

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}^3r\,\varphi(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\int_{r_i}^{r_a}\mathrm{d}r\,r^2\,\frac{1}{r^n}\\ &= 4\pi\int_{r_i}^{r_a}\mathrm{d}r\;r^{2-n}\\ &= \frac{4\pi}{3-n}r^{3-n}\Big|_{r_i}^{r_a}\;.\end{aligned}$$

Nun ist die Frage interessant, wie sich dieses Integral für $r_a \to \infty$ bzw. $r_i \to 0$ verhält:

(i) Für $r_a \to \infty$ bleibt das Integral endlich sofern $n > 3$, sofern also der Integrand *stärker* als $1/r^3$ abfällt.

(ii) Für $r_i \to 0$ konvergiert das Integral für $n < 3$, solange also der Integrand *schwächer* als $1/r^3$ singulär wird.

Damit ist also selbst eine Divergenz wie $1/r^2$ für $r \to 0$ in drei Raumdimensionen harmlos, was die Konvergenz von Integralen betrifft. Das ist sofort einsichtig: Eine solche Divergenz wird durch den Faktor r^2 des sphärischen Volumenelementes kompensiert. ■

Abbildung **IV**.4: Zum Verständnis des Gaußschen Integralsatzes: Bildet man die Summe der Flussintegrale durch die Oberflächen vieler Kästchen, die ein Volumen V ausfüllen, so heben sich die Flüsse durch die Trennwände benachbarter Kästchen gegenseitig auf. Was nämlich aus einem der beiden Kästchen herausströmt, strömt in seinen Nachbarn hinein.

IV.3 Die Integralsätze

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist die bekannte Integraldarstellung (**IV**.1.15) der Divergenz:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial(\Delta V)} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{v}\,.$$

Für ein kleines, aber endliches Volumen ΔV gilt daher die Näherung

$$\operatorname{div}\vec{v}\,\Delta V \approx \int_{\partial(\Delta V)} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{v}\,, \tag{**IV**.3.1}$$

wobei für $\operatorname{div}\vec{v}$ ein repräsentativer Wert innerhalb von ΔV zu verwenden ist. Betrachtet wird nun jedoch ein „großes“ (*nicht* infinitesimales) Volumen V, das durch (evtl. sehr viele) kleine Volumina ΔV_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) „ausgekästelt“ werden kann. Bildet man dann die Summe der Oberflächenintegrale über alle Kästchen, bleibt nur noch der Fluss durch die *Gesamt*oberfläche aller Kästchen, da sich der Fluss durch eine gemeinsame Trennwand zweier benachbarter Kästchen heraushebt, wie in Abbildung **IV**.4 verdeutlicht wird.
In dem Grenzfall, in dem die Teilvolumina ΔV_i beliebig klein werden und somit das große Volumen V beliebig gut ausfüllen, gilt daher

$$\sum_i \int_{\partial(\Delta V_i)} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{v} \longrightarrow \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{v}\,, \tag{**IV**.3.2}$$

wobei ∂V wie üblich den Rand des Volumens V bezeichnet. Auf der anderen Seite gilt im gleichen Grenzfall

$$\sum_i \big(\operatorname{div}\vec{v}\big)_i \Delta V_i \longrightarrow \int_V \mathrm{d}V \operatorname{div}\vec{v}\,. \tag{**IV**.3.3}$$

Aufgrund der Beziehung (**IV**.3.1), also aufgrund der Integraldarstellung der Divergenz sind beide Grenzwerte identisch:

$$\boxed{\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{v} = \int_V \mathrm{d}V \,\mathrm{div}\,\vec{v}} \qquad (\mathbf{IV}.3.4)$$

Das ist der *Gaußsche Integralsatz* in seiner „Urform". Er gilt, wie die vorherige Argumentation zeigt, für „regulär" geformte Volumina V, also für solche Volumina, die durch hinreichend kleine Kästchen beliebig gut ausgefüllt werden können.

■ **Beispiel:** Der Gaußsche Satz für den Fluss durch eine Kugel.

Sei $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r} = r\vec{e}_r$ und V eine Kugel vom Radius R. Dann hat man einerseits das Oberflächenintegral

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{v} &= R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \,\sin\vartheta\, R \\ &= 4\pi R^3 \,,\end{aligned}$$

andererseits mit $\mathrm{div}\,\vec{v} = 3$ das Volumenintegral

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}V \,\mathrm{div}\,\vec{v} &= 3 \int_V \mathrm{d}V \\ &= 3\,\frac{4\pi}{3} R^3 \,.\end{aligned}$$

Obwohl es den Anschein haben könnte, dass beide Integrale ähnlich leicht zu berechnen seien und daher die Verwendung des Gaußschen Satzes keinen echten Vorteil liefere, ist das nicht der Fall: Während nämlich die Berechnung des Oberflächenintegrals in der obigen Form nur für Kugeln gilt, zeigt der Gaußsche Satz die Gültigkeit der Identität

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{v} = 3V$$

sogar für beliebig geformte Volumina! ■

■ **Beispiel:** Oberflächenintegrale von Wirbelfeldern.

Für jedes Volumen V gilt die Identität

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v} \;=\; \int_V \mathrm{d}V \,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} \;=\; 0 \,.$$

Denn nach Gleichung (**IV**.1.29) sind Wirbelfelder quellenfrei, so dass der Zustrom eines Wirbelfeldes in ein Volumen V stets gleich seinem Abstrom sein muss. ■

Aus der Urform (**IV**.3.4) des Gaußschen Satzes folgen sofort zwei einfache, aber wichtige Varianten:

(i) Für einen konstanten Vektor $\vec{a}$ und ein Skalarfeld $\varphi(\vec{r})$ gilt die Gleichung (**IV**.1.16), also

$$\operatorname{div}(\vec{a}\varphi) = \vec{a} \cdot \operatorname{grad}\varphi \,.$$

Damit hat man

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{a}\varphi = \int_V \mathrm{d}V\, \vec{a} \cdot \operatorname{grad}\varphi \tag{**IV**.3.5}$$

für beliebige Vektoren $\vec{a}$, und somit auch die Identität

$$\boxed{\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\varphi = \int_V \mathrm{d}V \operatorname{grad}\varphi} \tag{**IV**.3.6}$$

(ii) Weiterhin gilt nach Gleichung (**IV**.1.25) auch

$$\operatorname{div}\vec{a} \times \vec{v} = -\vec{a} \cdot \operatorname{rot}\vec{v}\,,$$

so dass

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{a} \times \vec{v} = -\int_V \mathrm{d}V\, \vec{a} \cdot \operatorname{rot}\vec{v}\,. \tag{**IV**.3.7}$$

Mit der Umformung

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{a} \times \vec{v} \;=\; \int_{\partial V} \vec{a} \cdot \vec{v} \times \mathrm{d}\vec{f} \;=\; -\vec{a} \cdot \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \times \vec{v} \tag{**IV**.3.8}$$

erhält man daraus eine weitere Form des Gaußschen Satzes:

$$\boxed{\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \times \vec{v} = \int_V \mathrm{d}V \operatorname{rot}\vec{v}} \tag{**IV**.3.9}$$

Die drei Versionen (**IV**.3.4), (**IV**.3.6) und (**IV**.3.9) lassen sich einfach zusammenfassen durch die die symbolische Form

$$\boxed{\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \circ = \int_V \mathrm{d}V\, \vec{\nabla} \circ} \tag{**IV**.3.10}$$

Dabei steht das Zeichen „$\circ$“ entweder für das Skalarprodukt, für das übliche Produkt oder für das Kreuzprodukt, mit dem das Flächenelement $\mathrm{d}\vec{f}$ bzw. der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ mit dem dahinterstehenden Feld verknüpft wird.
Für viele konkrete Rechnungen wichtig ist die Tatsache, dass die Technik der partiellen Integration mit Hilfe des Gaußschen Satzes auf Volumenintegrale übertragen werden kann. Seien etwa $\varphi = \varphi(\vec{r})$ und $\psi = \psi(\vec{r})$ zwei differenzierbare Skalarfelder. Dann gilt

$$\partial_i(\varphi\psi) = \psi\partial_i\varphi + \varphi\partial_i\psi \tag{**IV**.3.11}$$

oder

$$\vec{\nabla}(\varphi\psi) = \psi\vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla}\psi \; . \tag{**IV**.3.12}$$

Daraus erhält man mit dem Gaußschen Satz (**IV**.3.6) für ein reguläres Volumen V sofort die Identität

$$\int_V \mathrm{d}V \, \varphi\vec{\nabla}\psi = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \, \varphi\psi - \int_V \mathrm{d}V \, \psi\vec{\nabla}\varphi \; . \tag{**IV**.3.13}$$

Falls nun der „Randterm“ (d.h. das Oberflächenintegral) verschwindet, z.B. weil das Volumen ins Unendliche ausgedehnt wird und der Integrand im Unendlichen hinreichend stark abfällt, hat man sogar

$$\int_V \mathrm{d}V \, \varphi\vec{\nabla}\psi = -\int_V \mathrm{d}V \, \psi\vec{\nabla}\varphi \; . \tag{**IV**.3.14}$$

In dieser Form wird die „partielle Integration mit Gaußschem Satz“ besonders häufig benötigt. Das Verschwinden der Randterme muss natürlich stets geprüft werden!
Ist nun wieder $\varphi = \varphi(\vec{r})$ ein Skalarfeld und $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ Vektorfeld, so gilt in ähnlicher Weise

$$\partial_i(\varphi v_i) = v_i\partial_i\varphi + \varphi\partial_i v_i \tag{**IV**.3.15}$$

oder

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \; , \tag{**IV**.3.16}$$

so dass

$$\int_V \mathrm{d}V \, \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\varphi\vec{v} - \int_V \mathrm{d}V \, \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\varphi \; . \tag{**IV**.3.17}$$

Sofern der Randterm verschwindet, wird auch hier lediglich der Nabla-Operator von einem Faktor des Integranden auf den anderen gewälzt.
Ein für die mathematische Physik herausragend wichtiger linearer Differentialoperator ist der *Laplace-Operator*, der sich aus der „Kontraktion“ von „div“ und „grad“ ergibt: Ist $\varphi = \varphi(\vec{r})$ ein zweimal differenzierbares Skalarfeld, so gilt

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \\ &= \partial_i\partial_i\varphi \\ &= \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\varphi \; , \end{aligned} \tag{**IV**.3.18}$$

wobei in der zweiten Zeile wieder die Summenkonvention vorausgesetzt und über den doppelt vorkommenden Index i summiert wird. Da nun

$$\partial_i(\varphi\partial_i\psi) = \partial_i\varphi\partial_i\psi + \varphi\partial_i\partial_i\psi \tag{**IV**.3.19}$$

oder

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi) = \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi + \varphi\Delta\psi \tag{**IV**.3.20}$$

für zwei Skalarfelder φ und ψ, findet man sofort

$$\int_V \mathrm{d}V\, \varphi\Delta\psi = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot \varphi \operatorname{grad}\psi - \int_V \mathrm{d}V \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi\ . \tag{**IV**.3.21}$$

Diese Integralformel für den Laplace-Operator wird als *2. Greenscher Satz* bezeichnet.[1] Vertauscht man hier die Rollen von φ und ψ und zieht die resultierende Gleichung von der ursprünglichen ab, so erhält man

$$\begin{aligned} &\int_V \mathrm{d}V \left(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi\right) \\ = &\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\left(\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi\right) - \int_V \mathrm{d}V \left(\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\varphi\right)\ . \end{aligned} \tag{**IV**.3.22}$$

Da hier der letzte Term verschwindet, wird das Volumenintegral auf der linken Seite exakt in ein Oberflächenintegral überführt:

$$\boxed{\int_V \mathrm{d}V \left(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi\right) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\left(\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi\right)} \tag{**IV**.3.23}$$

Das ist der *1. Greensche Satz*, welcher in der im folgenden Kapitel behandelten Potentialtheorie eine zentrale Rolle spielen wird.
Das Argument, das auf die Integraldarstellung (**IV**.1.15) der Divergenz geführt hat, also auf

$$\operatorname{div}\vec{v} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial(\Delta V)} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{v}\ ,$$

lässt sich ohne Änderung auf d Raumdimensionen übertragen: Man betrachtet dann die Differenz „Abstrom minus Zustrom“ eines d-dimensionalen Vektorfeldes $\vec{v}$ durch ein kleines d-dimensionales Volumen $\Delta V^{(d)}$ mit einer $(d-1)$-dimensionalen Berandung $\partial(\Delta V^{(d)})$

[1] *Nach Wikipedia:* George Green (geb. am 14. Juli 1793 in Sneinton (gespr. Snenton); gest. am 31. Mai 1841 in Nottingham) war ein britischer Mathematiker und Physiker. Er war ein Mitbegründer der Potentialtheorie und der Theorie des Elektromagnetismus. Die Greensche Funktion sowie die Greenschen Formeln gehen ebenfalls auf ihn zurück. George besuchte die Schule nur zwei Jahre und arbeitete dann in der Mühle seines Vaters von 1802 bis zu dessen Tod 1829. Er war in weitem Umfang Autodidakt und studierte in der eigenen Mühle die Grundlagen physikalischer Gesetze. 1828 veröffentlichte Green sein erstes Werk *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, in dem er die Potentialfunktion und das Konzept der Greenschen Funktion zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen einführt und den Satz von Green beweist. Im Alter von 40 Jahren ging Green 1833 an die Universität Cambridge und graduierte 1837 mit Auszeichnung. Nebenbei arbeitete er in seiner Mühle und machte damit ein kleines Vermögen. Er schrieb Werke über Akustik, Optik und Hydrodynamik und hatte an der Universität eine erfolgreiche, aber kurze Karriere. Vier Jahre nach seiner Graduierung starb er in Nottingham an Grippe. Seine Arbeit, die auf dem besten Wege zu internationaler Anerkennung war, geriet mit seinem Tod in Vergessenheit und wurde erst 1846 von Lord Kelvin wiederentdeckt.

Abbildung **IV**.5: Zum Gaußschen Integralsatz in zwei Raumdimensionen: Die Randkurve ∂A des zweidimensionalen Integrationsgebietes A besiztzt Linienelemente $\mathrm{d}\vec{r}$, auf denen die lokalen, auch außen weisenden Normalenvektoren $\mathrm{d}\vec{f}^{(1)}$ senkrecht stehen.

und erhält

$$\mathrm{div}^{(d)}\,\vec{v} = \lim_{\Delta V^{(d)}\to 0} \frac{1}{\Delta V^{(d)}} \int_{\partial(\Delta V^{(d)})} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{v}\,. \tag{**IV**.3.24}$$

In kartesischen Koordinaten wird dann die Divergenz des d-dimensionalen Feldes $\vec{v}$ gegeben durch

$$\mathrm{div}^{(d)}\,\vec{v} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,. \tag{**IV**.3.25}$$

Da nun die Integraldarstellung der Divergenz sofort auf den Gaußschen Satz führt, kann man einen *allgemeinen Gaußschen Satz für d-dimensionale Volumina* formulieren. Insbesondere für $d = 2$ reduziert sich ein Volumen V auf ein zweidimensionales Gebiet A, und man hat die Gleichung

$$\int_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = \int_{\partial A} \mathrm{d}\vec{f}^{(1)}\cdot\vec{v}\,, \tag{**IV**.3.26}$$

wobei ∂A die Randkurve des Gebietes A bezeichnet. Der Vektor $\mathrm{d}\vec{f}^{(1)}$ ist ein lokaler Normalenvektor dieser Randkurve, dessen Betrag die Länge des zugehörigen Linienelementes angibt, wie in Abbildung **IV**.5 skizziert.
Ist nun

$$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \tag{**IV**.3.27}$$

ein lokales Linienelement von ∂A, so ist offenbar

$$\mathrm{d}\vec{f}^{(1)} = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x) \tag{**IV**.3.28}$$

der zugehörige Normalenvektor. Setzt man diese Darstellung in die rechte Seite der Gleichung (**IV**.3.26) ein, erhält damit der „zweidimensionale Gaußsche Satz“ (**IV**.3.26) die konkretere Gestalt

$$\int_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \int_{\partial A} \left(v_x \mathrm{d}y - v_y \mathrm{d}x \right) . \tag{**IV**.3.29}$$

Betrachtet man nun anstelle des Feldes $\vec{v} = (v_x, v_y)$ das Feld $\vec{w} = (-v_y, v_x)$, so übersetzt sich diese Gleichung in

$$\int_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \int_{\partial A} \left(w_x \mathrm{d}x + w_y \mathrm{d}y \right) . \tag{**IV**.3.30}$$

Der Integrand auf der linken Seite kann aufgefasst werden als die z-Komponente der Rotation des in den dreidimensionalen Raum eingebetteten Vektorfeldes $\vec{W} = (w_x, w_y, 0)$: Es gilt

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x(x,y) \\ w_y(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x w_y - \partial_y w_x \end{pmatrix} . \tag{**IV**.3.31}$$

Da nun die Fläche A in der x-y-Ebene liegt, besitzen ihre orientierten Flächenelemente die Darstellung $\mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\vec{e}_z$. Die rechte Seite der Gleichung (**IV**.3.30) ist schließlich sofort als Linienintegral von $\vec{w}$ über die Randkurve ∂A zu erkennen. Damit nimmt der Gaußsche Satz für $d = 2$ seine endgültige Gestalt an:

$$\int_A \mathrm{d}\vec{f} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{w} = \int_{\partial A} \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{r} . \tag{**IV**.3.32}$$

Dieser hier nur für *ebene* Fächen A gezeigte Zusammenhang gilt auch in allgemeiner Form, d.h. für beliebig gekrümmte Flächen A mit Randkurve ∂A; das ist die Aussage des *Integralsatzes von Stokes*.[2]

Um diesen Satz in allgemeiner Form zu zeigen, wird zunächst dieser ebene Spezialfall (**IV**.3.32) auf ein kleines planares Flächenstück ΔF angewandt. Dieses Flächenstück kann beliebig orientiert sein, so dass sein Normalenvektor $\Delta\vec{F} = \Delta F\ \vec{n}$ in eine beliebige Richtung weisen kann. Dann hat man zunächst

$$\Delta F\ \vec{n} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{w} \approx \int_{\partial(\Delta F)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{w} , \tag{**IV**.3.33}$$

[2] *Nach Wikipedia:* Sir George Gabriel Stokes (geb. am 13. August 1819 in Skreen, County Sligo; gest. am 1. Februar 1903 in Cambridge) war ein irischer Mathematiker und Physiker. Stokes arbeitete auf dem Gebiet der reinen Mathematik sowie der mathematischen und experimentellen Physik. Seine theoretischen Untersuchungen beschäftigten sich hauptsächlich mit der Hydrodynamik, der Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen und der Theorie der Schallausbreitung. Seine Experimente hatten vorwiegend mit den Erscheinungen des Lichts zu tun. Eine wichtige Arbeit von Stokes behandelt die Fluoreszenz (diese Bezeichnung stammt von Stokes), deren Natur er als erster erkannte. Er wies nach, dass die fluoreszierenden Substanzen selbst leuchtend werden, indem sie das auftreffende Licht in sich aufnehmen. Dadurch geraten die Moleküle des Substrats in Schwingungen. Stokes begründete durch diese Arbeit die Theorie der Absorption des Lichts; die „Stokes-Verschiebung“ ist nach ihm benannt. In der Folge beschäftigte er sich mit der Spektralanalyse und untersuchte den ultravioletten Teil des Spektrums.

Abbildung **IV**.6: Zum Stokesschen Integralsatz: (a) Die geschlossene Kurve ∂F berandet eine glatte Fläche F, die mit einem Netz von Linien überzogen ist. Jede einzelne Masche ist näherungsweise eben. (b) Bildet man die Summe der Zirkulationen über alle Maschen, bleibt nur das Umlaufintegral über den Rand der Fläche, weil sich die Beiträge der inneren Maschenlinien paarweise kompensieren.

wobei wieder $\operatorname{rot}\vec{w}$ an einer geeigneten Stelle innerhalb des Flächenststücks ausgewertet wird. Daraus folgt dann sofort die wichtige Beziehung

$$\boxed{\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{w}=\lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta F}\int_{\partial(\Delta F)}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{w}} \qquad (\mathbf{IV}.3.34)$$

Diese Darstellung entspricht der Interpretation von $\operatorname{rot}\vec{w}$ als einer lokalen Wirbelstärke des Feldes $\vec{w}$: Die Komponente der Rotation von $\vec{w}$ in Richtung der Flächennormalen von ΔF ergibt sich durch Berechnung der Zirkulation, d.h. des Umlaufintegrals von $\vec{w}$ um ΔF, normiert auf die Größe dieses Flächenstücks.
Betrachtet wird nun eine beliebig geformte Fläche F mit Randkurve ∂F. Diese Fläche wird, wie in Abbildung **IV**.6 dargestellt, mit einem „Netz“ von Linien überzogen, das bereits so fein sein soll, dass die einzelnen Maschen ΔF_i dieses Netzes als eben angesehen werden können. Für jede dieser Maschen wird dann das Umlaufintegral des Feldes $\vec{w}$ gebildet; dafür gilt die Näherung (**IV**.3.33). Bildet man nun die Summe all dieser Zirkulationen, so bleibt nur noch der Beitrag des Gesamtrandes, da Linienstücke, die zu benachbarten Maschen gehören, in der Summe zweimal auftreten und gegensinnig durchlaufen werden, ihre Beiträge sich also gegenseitig kompensieren. In dem Grenzfall, in dem alle Maschen beliebig klein werden und somit die Fläche F beliebig gut approximieren, gilt daher

$$\sum_i\int_{\partial(\Delta F_i)}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{w}\longrightarrow\int_{\partial F}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{w}\;. \qquad (\mathbf{IV}.3.35)$$

Auf der anderen Seite hat man im gleichen Grenzfall

$$\sum_i\big(\operatorname{rot}\vec{w}\big)_i\Delta\vec{F}_i\longrightarrow\int_F\mathrm{d}\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{w}\;, \qquad (\mathbf{IV}.3.36)$$

wobei wieder $\left(\operatorname{rot}\vec{w}\right)_i$ einen repräsentativen Wert von $\operatorname{rot}\vec{w}$ innerhalb der Masche ΔF_i bezeichnet. Aufgrund der Beziehung (**IV**.3.33) sind beide Grenzwerte identisch:

$$\boxed{\int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{w} = \int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{w}} \qquad (\mathbf{IV}.3.37)$$

Diese Identität wird in der Physik als Integralsatz von Stokes oder kürzer als *Stokesscher Satz* bezeichnet. Bemerkenswert, jedoch aufgrund der Herleitung sofort klar ist die Tatsache, dass die Fläche F dem Rand ∂F beliebig (d.h. mit beliebiger „Wölbung“) übergestülpt sein kann, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert. Die Parallelen der obigen Argumentationskette zu derjenigen, die zu der Urform des Gaußschen Satzes geführt haben, sind offensichtlich; auf mathematischer Ebene besitzen der Gaußsche Satz (**IV**.3.4) und der Stokessche Satz (**IV**.3.37) eine gemeinsame Wurzel.

■ **Beispiel:** Der Stokessche Satz für ein Feld mit konstanter Wirbelstärke.

Betrachtet wird nun das Wirbelfeld

$$\vec{w}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\times\vec{r}\,,$$

das nach Gleichung (**IV**.1.24) die Rotation $\operatorname{rot}\vec{w} = \vec{\omega}$ besitzt; die Fläche F sei ein Kreis vom Radius R in der Ebene senkrecht zu ω. Dann gilt einerseits

$$\int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{w} \;=\; \frac{1}{2}\int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r} \;=\; \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\int_{\partial F}\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r}\,.$$

In ebenen Polarkoordinaten ist nun $\vec{r} = R\vec{e}_r$ und $\mathrm{d}\vec{r} = R\vec{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi$. Mit $\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$ sowie $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ erhält man dann

$$\int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{w} \;=\; \frac{1}{2}\,\omega\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,R^2 \;=\; \omega\pi R^2\,.$$

Auf der anderen Seite findet man sofort

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{w} \;=\; \vec{\omega}\cdot\int_F \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \omega\pi R^2\,.$$

Diese letzte Gleichung lässt einfach erkennen, dass der Wert des Integrals für eine beliebig berandete Fläche mit Inhalt F durch das Produkt ωF gegeben wird. ■

V Elektro- und Magnetostatik

In der *Elektrodynamik* wird die Zeitentwicklung *elektromagnetischer Felder* untersucht, die einerseits durch ruhende oder bewegte elektrische Ladungen erzeugt werden, andererseits auch auf diese Ladungen zurückwirken. Diese Dynamik, die durch das System der

Maxwell-Gleichungen beschrieben wird, ist sehr reichhaltig und daher Gegenstand eigener Vorlesungen. In diesem Kapitel können nur einige einfachere Zusammenhänge untersucht werden, die bereits für zeitunabhängige, also statische elektrische und magnetische Felder sichtbar werden. Auch diese „einfachen“ Zusammenhänge sind jedoch in mathematischer Hinsicht durchaus anspruchsvoll und erklären wichtige physikalische Phänomene.

V.1 Maxwell-Gleichungen und Einheitensysteme

Elektromagnetische Felder werden durch den Vektor $\vec{E}(\vec{r},t)$ der *elektrischen Feldstärke* und den Vektor $\vec{B}(\vec{r},t)$ der *magnetischen Induktion* beschrieben; beide Vektorfelder sind experimentell beobachtbare Größen. Sie sind gekoppelt an die *elektrische Ladungsdichte* $\varrho(\vec{r},t)$ und an die *elektrische Stromdichte* $\vec{j}(\vec{r},t)$: Durch Ladungen und Ströme werden Felder erzeugt, die ihrerseits die Bewegung der Ladungsträger beeinflussen. Dieses Wechselspiel wird zusammengefasst durch die vier Maxwell-Gleichungen[1], die hier als experimentell gesicherte Grundtatsachen vorausgesetzt werden sollen. Im Vakuum, in dem alle Ladungen und Ströme „frei“ sind, also nicht etwa erst durch die Polarisation von insgesamt neutraler Materie hervorgerufen werden, haben diese Gleichungen die Form

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r},t) \qquad (\mathbf{V}.1.1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad (\mathbf{V}.1.2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{0} \qquad (\mathbf{V}.1.3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = \mu_0\vec{j}(\vec{r},t)\ . \qquad (\mathbf{V}.1.4)$$

Hier wird das *SI-System* benutzt, so dass für Angaben von Längen, Massen, Zeiten und Stromstärken die Basiseinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampere[2] herangezogen werden. Somit wird das System der drei mechanischen Basiseinheiten um die Basiseinheit der elektrischen Stromstärke erweitert; dieses elektrodynamisch relevante Teilsystem des SI-Systems wird als MKSA-System bezeichnet.
Zur Bestimmung der Stromstärke lässt sich die Lorentzkraft F_L verwenden, die zwei stromdurchflossene dünne Leiter aufeinander ausüben: Sind beide Leiter ohne Krümmung im Abstand d parallel zueinander angeordnet und wird einer von ihnen vom Strom I_1 und der andere vom Strom I_2 durchflossen, so wird der Betrag dieser Kraft pro Leiterlänge L

[1] *Nach Wikipedia:* James Clerk Maxwell (geb. am 13. Juni 1831 in Edinburgh; gest. am 5. November 1879 in Cambridge) war ein schottischer Physiker. Die auf ihn zurückgehenden Maxwellschen Gleichungen bilden die Grundlage der Elektrizitätslehre und des Magnetismus. Sie sind eine der wichtigsten Leistungen der Physik und Mathematik des 19. Jahrhunderts. 1866 entwickelte Maxwell die kinetische Gastheorie und gilt daher neben dem später wirkenden Ludwig Boltzmann auch als einer der Begründer der Statistischen Mechanik. Die klassische Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen (die „Maxwell-Boltzmann-Verteilung“) ist nach beiden benannt. Maxwell veröffentlichte im Jahre 1861 die erste Farbfotografie als Nachweis für die Theorie der additiven Farbmischung.

[2] Obwohl man den Nachnamen des Namensgebers Ampère mit accent grave schreibt, wird die SI-Einheit im deutschen und englischen Sprachraum üblicherweise ohne Akzent, also Ampere, geschrieben.

beschrieben durch

$$F_L/L = 2k_L \frac{I_1 I_2}{d} \,, \tag{**V**.1.5}$$

wobei die linke Seite auf mechanischem Wege gemessen werden kann und somit die im Prinzip beliebig wählbare Proportionalitätskonstante k_L die Einheit der Stromstärke festlegt. 1948 wurde das Ampere daher wie folgt definiert:

> *1 Ampere ist die Stärke des zeitlich konstanten elektrischen Stromes, der im Vakuum zwischen zwei parallelen, unendlich langen, geraden Leitern mit vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt und dem Abstand von 1 m zwischen diesen Leitern eine Kraft von* $2 \cdot 10^{-7}$ *Newton pro Meter Leiterlänge hervorrufen würde.*

Man schreibt nun

$$k_L = \frac{\mu_0}{4\pi} \,, \tag{**V**.1.6}$$

wobei die auf diese Weise eingeführte Konstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \tag{**V**.1.7}$$

auch als „magnetische Feldkonstante“ oder „Permeabilität des Vakuums“ bezeichnet wird. Diese Konstante, die in die Maxwell-Gleichung (**V**.1.4) eingeht, spiegelt also lediglich die willkürlich vorgenommene Definition der Basiseinheit Ampere wider.
Da ein Strom die pro Zeiteinheit transportierte Ladungsmenge beschreibt, ergibt sich aus der Festlegung des Ampere eine Festlegung der SI-Einheit der Ladung, also des Coulomb: 1 Ampere = 1 Coulomb pro Sekunde, oder

$$1\,\mathrm{A} \;=\; 1 \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \;=\; 1\,\mathrm{C} \cdot \mathrm{s}^{-1} \,. \tag{**V**.1.8}$$

Nun üben zwei ruhende Ladungen Q_1 und Q_2, die sich im Abstand r voneinander befinden, ebenfalls eine Kraft aufeinander aus, deren Betrag

$$F_C = k_C \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{**V**.1.9}$$

erneut ohne Bezug zu der Einheit, in der die Ladung angegeben wird, gemessen werden kann. Nachdem also im MKSA-System die Einheit der Ladung als Konsequenz der Stromdefinition bereits fixiert wurde, muss nachträglich die Proportionalitätskonstante k_C im Coulomb-Kraftgesetz (**V**.1.9) so angepasst werden, dass die „richtige“ Kraft herauskommt. Das liefert dann den Ausdruck

$$k_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{**V**.1.10}$$

mit der „Dielektrizitätskonstanten“

$$\varepsilon_0 = 8.854\,188 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\ , \tag{**V**.1.11}$$

die auch als „Permittivität des Vakuums“ bezeichnet wird. Diese Konstante, die in der Maxwell-Gleichung (**V**.1.1) auftritt, ist also ebenso wie die magnetische Feldkonstante (**V**.1.7) *keine* fundamentale Naturkonstante, sondern lediglich ein Faktor, der durch den „Maßstab“ der Ladung bedingt wird.
Es ist nun offensichtlich, dass man die Proportionalitätskonstante k_L im Lorentz-Kraftgesetz (**V**.1.5) auch anders hätte wählen können; das hätte dann eine andere Konstante k_C nach sich gezogen. Allerdings ist der Quotient dieser beiden Faktoren eine absolute Konstante, die frei von jeder Willkür ist: Es gilt der Zusammenhang

$$\frac{k_L}{k_C} \ = \ \varepsilon_0\mu_0 \ = \ \frac{1}{c^2}\ , \tag{**V**.1.12}$$

wobei

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{**V**.1.13}$$

die *Lichtgeschwindigkeit im Vakuum* angibt. Im Gegensatz zu den sich gegenseitig bedingenden „Umrechnungsfaktoren“ ε_0 und μ_0 ist c tatsächlich eine fundamentale Größe.
Man erkennt an dieser Stelle auch, dass es Alternativen zum MKSA-System gibt, die sogar weniger künstlich erscheinen: Es ist keineswegs notwendig, das System der drei mechanischen Basiseinheiten für Länge, Masse und Zeit noch um eine vierte, „elektrische“ Basiseinheit zu erweitern. In dem auf Gauß zurückgehenden *cgs-System*, in dem die drei mechanischen Größen in Zentimeter, Gramm und Sekunde angegeben werden, setzt man $k_C = 1$, so dass die Einheit der Ladung gemäß dem Coulomb-Kraftgesetz (**V**.1.9) durch das „rein mechanische“ Produkt $(\text{Kraft})^{1/2} \cdot \text{Länge}$ bestimmt wird; im cgs-System werden Ladungen daher in $\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{s}^{-1}$ angegeben. Die universelle Beziehung (**V**.1.12) verlangt dann $k_L = 1/c^2$, so dass das Lorentz-Kraftgesetz (**V**.1.5) die Einheit des Stromes mit der des Produktes $(\text{Kraft})^{1/2} \cdot \text{Geschwindigkeit}$ gleichsetzt, im cgs-System also mit $\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{s}^{-2}$. In dieser Einführung soll jedoch weiterhin nur das heute gebräuchliche SI-System verwendet werden.
Zurück zu den Maxwell-Gleichungen: Zu unterscheiden sind die *homogenen* Maxwell-Gleichungen (**V**.1.2) und (**V**.1.3) einerseits und die *inhomogenen* Gleichungen (**V**.1.1) und (**V**.1.4) andererseits, wobei die Inhomogenitäten durch die Ladungen bzw. Ströme gebildet werden. Offenbar sorgen diese Inhomogenitäten dafür, dass von Nullvektoren verschiedene Felder als Lösungen auftreten müssen.
Bildet man nun die Divergenz der Gleichung (**V**.1.4), so erhält man aufgrund der Quellenfreiheit von Wirbelfeldern zunächst

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\ . \tag{**V**.1.14}$$

Berücksichtigt man dann die Gleichung (**V**.1.1), so erhält man die sehr wichtige Identität

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0\ , \tag{**V**.1.15}$$

die als *Kontinuitätsgleichung* bezeichnet wird. Der physikalische Gehalt dieser Gleichung lässt sich besonders einfach erkennen, wenn man sie über ein beliebiges Volumen V integriert: Das liefert die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}V\,\varrho(\vec{r},t) = -\int_V \mathrm{d}V\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)\;, \tag{**V**.1.16}$$

die mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}V\,\varrho(\vec{r},t) = -\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \tag{**V**.1.17}$$

gebracht wird. Nun bezeichnet das Integral auf der linken Seite die in dem Volumen V insgesamt enthaltene Ladung, wogegen das Integral auf der rechten Seite den Gesamtfluss bewegter Ladungen durch die Oberfläche von V angibt. Damit lässt sich diese Gleichung (**V**.1.17) wie folgt in Worte fassen:

> *Die Änderung der in einem Volumen V enthaltenen Ladung ist genau gleich der Ladung, die durch den Rand von V nach außen strömt.*

Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung (**V**.1.17) erklärt sich daraus, dass die Normalenvektoren $\mathrm{d}\vec{f}$ aus V herausweisen: Wenn die Ladung innerhalb von V abnimmt, nimmt sie im Außenraum von V zu. Daher drückt die Kontinuitätsgleichung (**V**.1.15), aus der diese Identität (**V**.1.17) gewonnen wurde, die Tatsache aus, dass elektrische Ladung nicht nur global, sondern sogar *lokal* erhalten ist: Wenn sich die in einem Volumen V enthaltene Ladung ändert, dann *nur*, weil Ladung durch den Rand dieses Volumens nach außen oder innen fließt; es gibt keine unstetigen Sprungprozesse, bei denen eine global erhaltene Ladung an einem Ort spontan verschwindet, um gleichzeitig an einem anderen aufzutauchen. Kontinuitätsgleichungen der Form (**V**.1.15) treten auch in anderen Teilgebieten der Physik auf; sie zeigen stets die Existenz einer lokalen Erhaltungsgröße an.
Ebenso wie die Bedeutung der differentiellen Kontinuitätsgleichung (**V**.1.15) durch Umformung in ihre Integralversion (**V**.1.17) einfacher erkennbar wird, lässt sich auch der physikalische Gehalt der Maxwell-Gleichungen anschaulicher anhand ihrer Integralfassungen diskutieren. Integriert man die Gleichung (**V**.1.1) über ein beliebiges Volumen V, ergibt sich

$$\int_V \mathrm{d}V\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}V\,\varrho\;. \tag{**V**.1.18}$$

Die linke Seite lässt sich mit dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral der elektrischen Feldstärke überführen; auf der rechten Seite findet man wieder die von ∂V umschlossene Ladung Q_V:

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_V\;. \tag{**V**.1.19}$$

Also in Worten:

Der Fluss der elektrischen Feldstärke durch den Rand ∂V eines Volumens V ist (bis auf den „Maßstabsfaktor“ $1/\varepsilon_0$) gleich der in V enthaltenen Ladung.

Oder noch kürzer:

Die Quellen des elektrischen Feldes sind die Ladungen.

Entsprechend einfach ist die Aussage der Gleichung (**V**.1.2):

Die magnetische Induktion ist quellenfrei.

Während daher elektrische Feldlinien stets an Ladungen beginnen oder enden, sind magnetische Feldlinien in sich geschlossen.
Integriert man weiterhin die Maxwell-Gleichung (**V**.1.3) über ein Flächenstück F, ergibt sich

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{B}\;. \tag{**V**.1.20}$$

Auf der linken Seite benutzt man den Stokesschen Integralsatz, um das Flächenintegral in ein Umlaufintegral über die Berandung ∂F der Fläche zu überführen. Bezeichnet man den auf der rechten Seite auftretenden Fluss der magnetischen Induktion durch F als Φ_F, hat man also

$$\int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_F\;. \tag{**V**.1.21}$$

Das ist das *Faradaysche Induktionsgesetz*:[3]

Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Fläche F, tritt längs der Randkurve ∂F ein elektrisches Wirbelfeld auf.

[3] *Nach Wikipedia:* Michael Faraday (geb. am 22. September 1791 in Newington, Surrey; gest. am 25. August 1867 in Hampton Court Green, Middlesex) war ein englischer Naturforscher, der als einer der bedeutendsten Experimentalphysiker gilt. Faradays Entdeckungen der „elektromagnetischen Rotation“ und der elektromagnetischen Induktion legten den Grundstein zur Herausbildung der Elektroindustrie. Seine anschaulichen Deutungen des magnetooptischen Effekts und des Diamagnetismus mittels Kraftlinien und Feldern führten zur Entwicklung der Theorie des Elektromagnetismus. Bereits um 1820 galt Faraday als führender chemischer Analytiker Großbritanniens. Er entdeckte eine Reihe von neuen Kohlenwasserstoffen, darunter Benzol und Buten, und formulierte die Grundgesetze der Elektrolyse.

Aufgewachsen in einfachen Verhältnissen und ausgebildet als Buchbinder, fand der von der Naturforschung begeisterte Faraday eine Anstellung als Laborgehilfe von Humphry Davy an der Royal Institution, die zu seiner wichtigsten Wirkungsstätte wurde. Im Labor der Royal Institution führte er seine wegbereitenden elektromagnetischen Experimente durch, in ihrem Hörsaal trug er mit seinen Weihnachtsvorlesungen dazu bei, neue wissenschaftliche Erkenntnisse zu verbreiten. 1833 wurde Faraday zum ersten Fuller-Professor für Chemie ernannt. Faraday führte etwa 30.000 Experimente durch und veröffentlichte 450 wissenschaftliche Artikel. Die wichtigsten seiner Publikationen zum Elektromagnetismus fasste er in seinen *Experimental Researches in Electricity* zusammen. Sein populärstes Werk *Chemical History of a Candle* war die Mitschrift einer seiner Weihnachtsvorlesungen.

Abbildung **V**.1: Zur Lenzschen Regel: Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Fläche F, so wird längs der Randkurve ∂F ein elektrisches Wirbelfeld erzeugt; nimmt der Fluss zu, verlaufen die Feldlinien nach dem Induktionsgesetz (**V**.1.21) in Pfeilrichtung. Dieses sich ändernde elektrische Feld erzeugt seinerseits ein magnetisches Wirbelfeld, das die Randkurve gemäß der Gleichung (**V**.1.23) derart umgibt, dass es die ursprüngliche Flussänderung kompensiert.

Die Maxwell-Gleichung (**V**.1.4) liefert schließlich

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E} + \mu_0\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{j}\,. \tag{**V**.1.22}$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite gibt den Ladungsstrom I an, d.h. die pro Zeiteinheit durch die Fläche F hindurchtretende elektrische Ladung. Dann muss auch der erste Term auf der rechten Seite, der die Änderung des elektrischen Flusses durch F beschreibt, einen Strom darstellen; dieser Strom wird als *Maxwellscher Verschiebungsstrom* bezeichnet. Man hat daher

$$\int_{\partial F}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{B} = \mu_0\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_0\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E}\right) + \mu_0 I \tag{**V**.1.23}$$

und erhält somit ein Komplement zum Induktionsgesetz:

Ein sich änderndes elektrisches Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.

Bemerkenswert ist, dass die Änderung des magnetischen Flusses auf der rechten Seite des Faradayschen Induktionsgesetzes (**V**.1.21) mit einem Minuszeichen eingeht, wogegen die Änderung des elektrischen Flusses in dieser Gleichung (**V**.1.23) ein positives Vorzeichen besitzt. Die Konsequenz des Zusammenspiels dieser beiden Vorzeichen wird durch die Abbildung **V**.1 verdeutlicht: Ein sich ändernder magnetischer Fluss durch eine Fläche F erzeugt nach dem Induktionsgesetz (**V**.1.21) ein elektrisches Wirbelfeld längs der Randkurve ∂F, dessen Richtung dem Vorzeichen auf der rechten Seite dieser Gleichung gehorcht. Dieses sich ändernde elektrische Feld erzeugt gemäß der Gleichung (**V**.1.23) seinerseits ein magnetisches Wirbelfeld, das die Randkurve ∂F zirkular umgibt und so gerichtet ist,

dass es die ursprüngliche magnetische Flussänderung kompensiert. Diese Kompensation einer Flussänderung wird in allgemeiner Form durch die *Lenzsche Regel*[4] ausgedrückt:

> *Elektrodynamische Prozesse verlaufen derart, dass Flussänderungen entgegengewirkt wird.*

V.2 Potentialtheorie

In den folgenden Abschnitten werden ausschließlich „statische“ Situationen betrachtet, so dass Ladungen, Ströme und Felder nicht von der Zeit abhängen. Während dann die Maxwell-Gleichung (**V**.1.1) ihre Form behält,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\vec{r}) \; , \tag{\textbf{V}.2.1}$$

reduziert sich das Induktionsgesetz (**V**.1.3) auf

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \; . \tag{\textbf{V}.2.2}$$

Diese Gleichung spielt nun die Rolle einer *Integrabilitätsbedingung* in genau dem gleichen Sinne, wie die Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ gemäß Abschnitt **III**.2 die Existenz eines mechanischen Potentials $V(\vec{r})$ für ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ garantiert, dessen Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist. Dieses frühere Resultat kann daher hier unmittelbar übernommen werden: Sofern das Gebiet, auf dem ein statisches elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ gegeben ist, einfach zusammenhängt, kann dieses Vektorfeld als negativer Gradient eines Skalarfeldes $\Phi(\vec{r})$ dargestellt werden,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \; . \tag{\textbf{V}.2.3}$$

Das so eingeführte neue Feld $\Phi(\vec{r})$ wird als *elektrostatisches Potential* des elektrischen Feldes bezeichnet. Damit erhält die Maxwell-Gleichung (**V**.2.1) die Form

$$\vec{\nabla} \cdot \big(-\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \big) = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\vec{r}) \; , \tag{\textbf{V}.2.4}$$

so dass

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\vec{r}) \; . \tag{\textbf{V}.2.5}$$

[4] *Nach Wikipedia:* Heinrich Friedrich Emil Lenz (geb. am 12. März (jul.) / 24. März (greg.) 1804 in Dorpat (heute Tartu, Estland); gest. am 10. Februar 1865 in Rom) war ein deutsch-baltischer Physiker, welcher als einer der Ersten die Zusammenhänge zwischen Magnetfeldern und elektrischen Feldern erkannte. Bereits 1830 stellte er fest, dass man einen elektrischen Motor auch als Generator verwenden kann. Weiterhin stellte er bei diesen Untersuchungen 1833 die Lenzsche Regel auf, welche besagt, dass die Richtung der Induktionsströme nicht zufällig ist, sondern immer der Ursache ihrer Entstehung entgegenwirkt. Weiterhin entdeckte er 1835 die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit in Metallen sowie elektrischer Widerstände und ein Verfahren zur Ausmessung magnetischer Felder. Durch Anwendung des Peltier-Effekts konnte er Wasser zum Gefrieren bringen. Außerdem bestimmte er gemeinsam mit James Prescott Joule quantitative Charakteristika der Stromwärme (das Joule-Lenz-Gesetz).

Das ist die *Poisson-Gleichung*[5], die eine mathematische Grundlage der gesamten Elektrostatik bildet. Die vorgegebene Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ tritt in dieser linearen partiellen DGL als Inhomogenität auf; aus ihrer Lösung $\Phi(\vec{r})$ erhält man nach Gleichung (**V**.2.3) schließlich das elektrische Feld. Falls keine Ladungen vorhanden sind, reduziert sich die Poisson-Gleichung auf die homogene *Laplace-Gleichung*[6], also auf

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 0 \; . \tag{\textbf{V}.2.6}$$

Die Verwendung des Potentials $\Phi(\vec{r})$ stellt eine erhebliche Vereinfachung dar, da man zunächst nicht mehr die drei Komponenten des Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r})$ zu betrachten braucht, sondern nur ein einziges skalares Feld berechnet werden muss.
Wie aber löst man eine Poisson-Gleichung? Zur Vorbereitung einer sehr allgemeinen Antwort auf diese Frage wird nun in einem ersten Schritt die Lösung für die kleinstmögliche Inhomogenität im unendlichen Raum konstruiert, nämlich für eine Punktladung q, deren Feld durch keine Berandungen beeinflusst wird und daher radialsymmetrisch sein muss. Befindet sich die Ladung im Ursprung des Koordinatensystems, gilt somit $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\vec{e}_r$. Integration der Maxwell-Gleichung (**V**.2.1) über eine Kugel mit einem beliebigen Radius r, in deren Zentrum die Ladung ruht, ergibt nach Anwendung des Gaußschen Satzes die Beziehung

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q \; , \tag{\textbf{V}.2.7}$$

[5] *Nach Wikipedia:* Siméon Denis Poisson (geb. am 21. Juni 1781 in Pithiviers (Département Loiret); gest. am 25. April 1840 in Paris) war ein französischer Physiker und Mathematiker. Poisson war ein Schüler von Pierre-Simon Laplace. Er beschäftigte sich mit den physikalischen Grundlagen von Wellen und arbeitete über Akustik, Elastizität und Wärme sowie über die elektrischen Eigenschaften fester Körper. 1812 publizierte er eine Erweiterung der Laplace-Gleichung um die Oberflächenladung. 1813 untersuchte Poisson das Potential im Innern anziehender Massen (nur innere Schichten liefern einen Kraftbeitrag, das Potential der äußeren Schichten ist Null). Die Ergebnisse fanden auch in der Elektrostatik Anwendung; er leistete damit einen Beitrag zur Potentialtheorie. Als Mathematiker arbeitete Poisson auf vielen Gebieten, unter anderem der Differentialgeometrie, Infinitesimalrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mehrere mathematische Begriffe sind mit seinem Namen verbunden, z.B. Poissonsche Differentialgleichung, Poissonsche Integralformel, Poisson-Kern, Poisson-Verteilung, Poissonzahl und Poisson-Klammer. Insgesamt veröffentlichte er über 300 Arbeiten.

[6] *Nach Wikipedia:* Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (geb. am 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge in der Normandie; gest. am 5. März 1827 in Paris) war ein französischer Mathematiker, Physiker und Astronom. Er beschäftigte sich unter anderem mit der Wahrscheinlichkeitstheorie und mit Differentialgleichungen. Laplace's größte wissenschaftliche Leistung liegt auf dem Gebiet der Himmelsmechanik. Von 1799 bis 1823 verfasste er sein Hauptwerk *Traité de Mécanique Céleste*; dieses fünfbändige Werk erschien auf deutsch unter dem Titel *Himmelsmechanik*. Darin gibt er einen Überblick über alle seit Newton gewonnenen Erkenntnisse sowie über seine eigenen Forschungen. Außerdem postuliert er die Existenz von Schwarzen Löchern und beschäftigt sich mit dem Drei-Körper-Problem. Obwohl das Werk mathematisch sehr anspruchsvoll und deshalb sehr schwer zu lesen ist, wurde es in der Folgezeit Pflichtlektüre für alle angehenden Astronomen. Das zweite große Forschungsgebiet von Laplace war die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Für Laplace stellte sie einen Ausweg dar, um trotz fehlender Kenntnisse zu gewissen Aussagen zu gelangen. In seinem zweibändigen Werk *Théorie Analytique des Probabilités* (1812) gab Laplace eine Definition der Wahrscheinlichkeit und befasste sich mit abhängigen und unabhängigen Ereignissen, vor allem in Verbindung mit Glücksspielen. Außerdem behandelte er in diesem Werk den Begriff des Erwartungswertes sowie Sterblichkeit und Lebenserwartung.

da ja die Flächennormalen $\mathrm{d}\vec{f}$ der Kugel radial nach außen, also in Richtung von $\vec{e}_r$ weisen. Damit kann das von der Punktladung q erzeugte Feld sofort angegeben werden:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (\vec{r}\neq\vec{0})\ .\end{aligned} \tag{**V**.2.8}$$

Wenn sich die „Quelle“ q nicht im Ursprung, sondern an einem beliebigen anderen Punkt $\vec{r}\,'$ befindet, hat man entsprechend

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \qquad (\vec{r}\neq\vec{r}\,')\ . \tag{**V**.2.9}$$

Das zugehörige Potential lässt sich unschwer angeben:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ , \tag{**V**.2.10}$$

da ja

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\ , \tag{**V**.2.11}$$

wobei weiterhin $\vec{r}\neq\vec{r}\,'$ vorauszusetzen ist. Nun muss dieses Potential (**V**.2.10) die Poisson-Gleichung für eine Punktladung bei $\vec{r}=\vec{r}\,'$ lösen. Die zu einer echten *Punkt*ladung gehörige Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ muss die folgenden Eigenschaft besitzen:

$$\int_V \mathrm{d}V\,\varrho(\vec{r}) = \begin{cases} q & ,\ \text{falls}\ \ \vec{r}\,'\ \text{in}\ V\ ; \\ 0 & ,\ \text{sonst.}\end{cases} \tag{**V**.2.12}$$

Das kann jedoch nicht durch eine „normale“ Funktion $\varrho(\vec{r})$ bzw. durch ein übliches Integral geleistet werden, da ein Integral über eine Funktion, deren Wert nur an einer einzigen Stelle von Null verschieden ist, nur den Wert Null annehmen kann. Es wird daher an dieser Stelle notwendig, eine „verallgemeinerte Funktion“ $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ einzuführen, also ein Objekt, das nicht als eine Funktion im bekannten Sinn aufzufassen ist und durch zwei Forderungen charakterisiert wird: Einerseits

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = 0 \qquad \text{für} \quad \vec{r}\neq\vec{r}\,'\ , \tag{**V**.2.13}$$

andererseits

$$\int_V \mathrm{d}^3r\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = 1 \qquad \text{für} \quad \vec{r}\,'\ \text{in}\ V\ . \tag{**V**.2.14}$$

Akzeptiert man die Existenz dieser so genannten „δ-Funktion“, so erhält die gesuchte Ladungsdichte einer Punktladung die Form

$$\varrho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\ . \tag{**V**.2.15}$$

Die mathematische Präzisierung dieser heuristischen, aber nicht nur für die Physik *sehr* wichtigen und nützlichen Begriffsbildung fällt in den Bereich der Distributionentheorie. Ein wesentlicher Gedanke dabei ist der folgende: Die entscheidende Eigenschaft, die die Distribution $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ auszeichnet, ist die Gültigkeit der Gleichung

$$f(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r'\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') f(\vec{r}\,') \tag{**V**.2.16}$$

für glatte „Testfunktionen“ f. Das lässt sich auffassen als eine Abbildung, durch die der Funktion f ihr Wert an der Stelle $\vec{r}$ zugeordnet wird. Während diese Abbildung als solche wohldefiniert ist, hat ihre Darstellung (**V**.2.16) mit Hilfe der „δ-Funktion“ lediglich symbolischen Charakter. Man kann allerdings diese Abbildung streng durch eine reguläre Funktionenfolge $\delta_n(\vec{r}-\vec{r}\,')$ beschreiben, deren Elemente mit zunehmenden Index n immer schärfer um $\vec{r}=\vec{r}\,'$ herum zentriert sind (z.B. gaußisch), während ihr Integral konstant bleibt, so dass die scharfe δ-Zacke im Grenzfall $n\to\infty$ gerade den Funktionswert unter der Zacke isoliert *(Übungsaufgabe!)*:

$$f(\vec{r}) = \lim_{n\to\infty} \int \mathrm{d}^3 r'\, \delta_n(\vec{r}-\vec{r}\,') f(\vec{r}\,') \,. \tag{**V**.2.17}$$

Die damit verbundene Vorstellung von $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ als einer „Nullfunktion mit einer unendlich scharfen Zacke“ ist für täglichen Umgang damit durchaus sinnvoll.
Setzt man nun das Potential (**V**.2.10) und die Ladungsdichte (**V**.2.15) in die Poisson-Gleichung (**V**.2.5) ein, ergibt sich der Zusammenhang

$$\Delta \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'). \tag{**V**.2.18}$$

Draus folgt sofort die wichtige Beziehung

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \,, \tag{**V**.2.19}$$

die ebenfalls im Distributionssinn aufzufassen ist: Beide Seiten dieser Gleichung erhalten ihre eigentliche Bedeutung unter einem Integral, wo sie wie in der Darstellung (**V**.2.16) mit einer regulären Funktion multipliziert werden.
Mit der Elementarlösung der Poisson-Gleichung für eine δ-Inhomogenität, d.h. für eine Punktladung, hat man wegen der Linearität dieser Gleichung auch ihre Lösung für jede andere Ladungsverteilung gefunden, sofern an das volle Potential die gleichen Randbedingungen gestellt werden wie an diese Elementarlösung: Es gilt ja die Beziehung

$$\varrho(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r'\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\varrho(\vec{r}\,') \,, \tag{**V**.2.20}$$

so dass die vorgegebene Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ dargestellt wird als eine Superposition von Punktladungen der „Stärken“ $\varrho(\vec{r}\,')$, die sich an den Orten $\vec{r}\,'$ befinden. Als Folge der Linearität der Poisson-Gleichung ergibt sich dann auch das durch $\varrho(\vec{r})$ verursachte

Potential durch eine entsprechende Superposition der zu den Punktladungen gehörenden Elementarlösungen:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \; . \tag{**V**.2.21}$$

Ein formaler Beweis dieser Aussage lässt sich sofort mit Hilfe der Beziehung (**V**.2.19) führen: Man hat, da der Laplace-Operator nur auf den „ungestrichenen“ Vektor wirkt, die Identität

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \, \varrho(\vec{r}\,') \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \, \varrho(\vec{r}\,') \big(- 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \big) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \, \varrho(\vec{r}\,') \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\vec{r}) \; . \end{aligned} \tag{**V**.2.22}$$

Das systematische Verfahren zur Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen, das sich hier andeutet, führt auf das Konzept der *Greenschen Funktion*. Dieser für die mathematische Physik zentrale Begriff soll hier in allgemeiner Form eingeführt werden:

Gegeben ist eine inhomogene Differentialgleichung

$$L\varphi(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

mit einem linearen *Differentialoperator L. Um die gesuchte Lösung $\varphi(\vec{r})$ zu berechnen, konstruiere man zunächst die Elementarlösung $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für die „Minimalinhomogenität“ $\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$, also die Lösung der Gleichung*

$$L\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \; ;$$

diese Elementarlösung wird als Greensche Funktion von *L bezeichnet. Dann ergibt sich $\varphi(\vec{r})$ durch „Faltung“ dieser Greenschen Funktion mit der tatsächlichen Inhomogenität $f(\vec{r})$,*

$$\varphi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \, G(\vec{r}, \vec{r}\,') f(\vec{r}\,') \; ,$$

denn

$$\begin{aligned} L\varphi(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}^3 r' \, L\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') f(\vec{r}\,') \\ &= \int \mathrm{d}^3 r' \, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') f(\vec{r}\,') \\ &= f(\vec{r}) \; . \end{aligned}$$

Abbildung **V**.2: Befindet sich eine Ladungsverteilung ϱ vor einer Metallplatte, so wird der Feldverlauf auch durch diese Platte bestimmt: Ihre Oberfläche ist eine Äquipotentialfläche, auf der das elektrische Feld senkrecht steht. Solche Randbedingungen müssen bei der Lösung der Poisson-Gleichung berücksichtigt werden.

Vor diesem Hintergrund ist also nun

$$G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (\mathbf{V}.2.23)$$

als Greensche Funktion des Laplace-Operators zu erkennen.
Allerdings ist die damit konstruierte Potentialfunktion

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\, G_0(\vec{r},\vec{r}\,')\varrho(\vec{r}\,') \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (\mathbf{V}.2.24)\end{aligned}$$

nur dann die gesuchte Lösung der Poisson-Gleichung für eine lokalisierte Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$, wenn an das Potential die Randbedingung $\Phi(\vec{r}) \to 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$ gestellt wird. Die physikalische Situation ändert sich jedoch, wenn $\Phi(\vec{r})$ in einem Volumen V gesucht wird, das durch materielle Ränder begrenzt wird. Wenn z.B. ein Teil des Volumens durch eine Metallplatte abgeschlossen wird, wie in der Abbildung **V**.2 angedeutet, so hat diese Platte einen erheblichen Einfluss auf das elektrische Feld und damit auf das Potential: Die Metalloberfläche liefert eine *Äquipotentialfläche*, auf der das elektrische Feld senkrecht steht. (Wäre das nicht der Fall, gäbe es eine Komponente des Feldes parallel zur Oberfläche, welches Ladungsträger beschleunigen könnte, so dass keine statische Situation vorläge.) Bei der Lösung der Poisson-Gleichung müssen derartige Randbedingungen berücksichtigt werden; man hat also ein *Randwertproblem* zu lösen. Die folgenden Überlegungen dienen der Klärung der Frage, wann ein solches elektrostatisches Randwertproblem richtig gestellt ist, d.h. welche Vorgaben benötigt werden, um es eindeutig lösen zu können.
Ein Schlüssel zur Lösung eines elektrostatischen Randwertproblems besteht in der Beobachtung, dass „die“ Greensche Funktion des Laplace-Operators durch die Forderung

$$\Delta G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (\mathbf{V}.2.25)$$

nicht vollständig bestimmt wird: Die allgemeine Lösung dieser Gleichung besitzt die Form

$$\begin{aligned} G(\vec{r},\vec{r}\,') &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + g(\vec{r},\vec{r}\,') \\ &= G_0(\vec{r},\vec{r}\,') + g(\vec{r},\vec{r}\,') \;, \end{aligned} \tag{**V**.2.26}$$

wobei die Funktion $g(\vec{r},\vec{r}\,')$ der Laplace-Gleichung in V gehorchen muss,

$$\Delta g(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \;, \tag{**V**.2.27}$$

aber sonst beliebig ist. Die mit der Wahl von $g(\vec{r},\vec{r}\,')$ verbundene Freiheit lässt sich ausnutzen, um die vorgegebenen Randbedingungen auf dem Rand ∂V eines betrachteten Volumens V zu erfüllen.
Ausgangspunkt dazu ist der 1. Greensche Satz (**IV**.3.23), also die Identität

$$\int_V \mathrm{d}^3r \left(\varphi(\vec{r})\Delta\psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})\Delta\varphi(\vec{r})\right) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\left(\varphi(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right) \tag{**V**.2.28}$$

für zwei Skalarfelder $\varphi(\vec{r})$ und $\psi(\vec{r})$. Diese Identität wird nun angewandt auf das gesuchte Potential und auf die noch nicht vollständig festgelegte Greensche Funktion (**V**.2.26), also auf $\varphi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r})$ und $\psi(\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r}\,')$. Außerdem sollen weiterhin der „Beobachtungspunkt“ $\vec{r}$ durch einen „ungestrichenen“ Vektor und die „Quellpunkte“ durch „gestrichene“ Vektoren $\vec{r}\,'$ bezeichnet werden, so dass

$$\begin{aligned} &\int_V \mathrm{d}^3r' \left(\Phi(\vec{r}\,')\Delta' G(\vec{r},\vec{r}\,') - G(\vec{r},\vec{r}\,')\Delta'\Phi(\vec{r}\,')\right) \\ = &\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}'\cdot\left(\Phi(\vec{r}\,')\vec{\nabla}' G(\vec{r},\vec{r}\,') - G(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{\nabla}'\Phi(\vec{r}\,')\right) . \end{aligned} \tag{**V**.2.29}$$

Dabei wirken die Operatoren Δ' und $\vec{\nabla}'$ auf die „gestrichenen“ Vektoren; ferner wird die Symmetrie $G(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r}\,',\vec{r})$ ausgenutzt. Nun hat man die vorausgesetzen Identitäten

$$\Delta' G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{**V**.2.30}$$

und

$$\Delta'\Phi(\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r}\,') \;, \tag{**V**.2.31}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\int_V \mathrm{d}^3r' \left(\Phi(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') + G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r}\,')\right) \\ = &\int_{\partial V} \mathrm{d}f' \left(\Phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\Phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}\right) . \end{aligned} \tag{**V**.2.32}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung wurden die Gradienten $\vec{\nabla}' G(\vec{r},\vec{r}\,')$ und $\vec{\nabla}'\Phi(\vec{r}\,')$ auf die Richtung der Flächennormalen $\mathrm{d}\vec{f}' = \mathrm{d}f'\,\vec{n}\,'$ projiziert, wodurch sich die Ableitungen in Richtung dieser Flächennormalen ergeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{f}' \cdot \vec{\nabla}' G(\vec{r},\vec{r}\,') &= \mathrm{d}f'\,\vec{n}\,' \cdot \vec{\nabla}' G(\vec{r},\vec{r}\,') \\ &= \mathrm{d}f'\,\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} \end{aligned} \tag{**V**.2.33}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{f}' \cdot \vec{\nabla}' \Phi(\vec{r}\,') &= \mathrm{d}f'\,\vec{n}\,' \cdot \vec{\nabla}' \Phi(\vec{r}\,') \\ &= \mathrm{d}f'\,\frac{\partial \Phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}\,. \end{aligned} \tag{**V**.2.34}$$

Damit erhält man nun eine Integralgleichung, die das gesuchte Potential $\Phi(\vec{r})$ im Inneren von V durch die Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ in V und die Werte *sowohl* des Potentials *als auch* seiner Normalenableitung auf dem Rand ∂V ausdrückt:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3 r'\, G(\vec{r},\vec{r}\,')\varrho(\vec{r}\,') \\ &\quad + \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \left(\Phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial \Phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} \right)\,. \end{aligned} \tag{**V**.2.35}$$

Allerdings werden die folgenden Überlegungen zeigen, dass das Potential bereits festgelegt ist, wenn *entweder* $\Phi(\vec{r}\,')$ *oder* $\partial\Phi(\vec{r}\,')/\partial n'$ auf dem Rand vorgegeben wird. Dementsprechend unterscheidet man zwei Typen von Randwertproblemen:

(i) Wenn das Potential Φ selbst auf dem Rand ∂V vorgegeben ist, spricht man von einem *Dirichletschen Randwertproblem*.[7] In der dafür benötigten *Dirichletschen Greenschen Funktion*

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = G_0(\vec{r},\vec{r}\,') + g_D(\vec{r},\vec{r}\,') \tag{**V**.2.36}$$

wählt man die bisher offene Funktion $g_D(\vec{r},\vec{r}\,')$ dergestalt, dass

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}f'\, G_D(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial \Phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} = 0\,. \tag{**V**.2.37}$$

[7] *Nach Wikipedia:* Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (geb. am 13. Februar 1805 in Düren; gest. am 5. Mai 1859 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker. 1855 trat Dirichlet in Göttingen als Professor der höheren Mathematik die Nachfolge von Carl Friedrich Gauß an. Diese Position hatte er bis an sein Lebensende 1859 inne. Dirichlet forschte auf den Gebieten der partiellen Differentialgleichungen, der bestimmten Integrale und der Zahlentheorie. Er verknüpfte die bis dahin getrennten Gebiete der Zahlentheorie und der Analysis. Nach ihm wurden die Dirichletreihen benannt, die als Verallgemeinerung der Zetafunktion auftreten. Er gab Kriterien für die Konvergenz von Fourierreihen und bewies die Existenz von unendlich vielen Primzahlen in arithmetischen Progressionen, bei denen das erste Glied teilerfremd zur Differenz aufeinanderfolgender Glieder ist. Nach ihm benannt ist der Dirichletsche Einheitensatz über Einheiten in algebraischen Zahlkörpern. Seine neue Art von Betrachtungen der Potentialtheorie wurden später von Bernhard Riemann verwendet und weiterentwickelt. Er beschäftigte sich auch mit mathematischer Physik (unter anderem Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten). Seine Vorlesungen über Zahlentheorie wurden nach seinem Tod von Richard Dedekind herausgegeben und mit einem berühmten eigenen Anhang versehen.

Häufig kann man das schon erreichen, indem man sogar $G_D(\vec{r},\vec{r}\,')$ selbst auf dem Rand ∂V verschwinden lässt:

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \qquad \text{für alle } \vec{r}\,' \text{ auf } \partial V\ . \tag{**V**.2.38}$$

Damit erhält man schließlich das Potential in der Form

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3r'\, G_D(\vec{r},\vec{r}\,')\varrho(\vec{r}\,') + \int_{\partial V}\mathrm{d}f'\,\Phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G_D(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\ . \tag{**V**.2.39}$$

(ii) Ist dagegen die Normalenableitung $\partial\Phi/\partial n' = -\vec{E}\cdot\vec{n}\,'$ auf dem Rand vorgegeben, also die (negative) Normalkomponente des elektrischen Feldes, spricht man von einem *Neumannschen Randwertproblem*.[8] Der scheinbar naheliegende Versuch, eine *Neumannsche Greensche Funktion* derart zu wählen, dass

$$\frac{\partial G_N(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} = 0 \qquad \text{für alle } \vec{r}\,' \text{ auf } \partial V$$

führt allerdings auf einen Widerspruch. Denn einerseits gilt

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\,\Delta' G_N(\vec{r},\vec{r}\,') \;=\; \int_V \mathrm{d}^3r'\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \;=\; 1\ , \tag{**V**.2.40}$$

andererseits

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\,\Delta' G_N(\vec{r},\vec{r}\,') \;=\; \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{f}'\cdot\vec{\nabla}' G_N(\vec{r},\vec{r}\,') \;=\; \int_{\partial V}\mathrm{d}f'\,\frac{\partial G_N(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\ . \tag{**V**.2.41}$$

Das lässt sich erfüllen, wenn man die Funktion $g_N(\vec{r},\vec{r}\,')$ nun so festlegt, dass

$$\frac{\partial G_N(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} = \frac{1}{F(V)} \qquad \text{für alle } \vec{r}\,' \text{ auf } \partial V\ , \tag{**V**.2.42}$$

wobei $F(V)$ das Maß der Oberfläche von V bezeichnet. Dann ist

$$\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\,\Phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G_N(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} \;=\; \frac{1}{F(V)}\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\,\Phi(\vec{r}\,') \;=\; \overline{\Phi} \tag{**V**.2.43}$$

[8] *Nach Wikipedia:* Carl Gottfried Neumann (geb. am 7. Mai 1832 in Königsberg (Preußen); gest. am 27. März 1925 in Leipzig) war ein deutscher Mathematiker. Neumann wird als einer der Begründer der Theorie der Integralgleichungen angesehen; die Neumann-Reihe ist nach ihm benannt. Sein Name ist auch verbunden mit der „Methode des Arithmetischen Mittels“ und der Theorie der Bessel- und Kugelfunktionen. Im Bereich der Mathematischen Physik schrieb er Aufsätze insbesondere zur analytischen Mechanik und zur Potentialtheorie. Besonders auffällig ist die sehr spezielle Arbeitsweise Neumanns, die vor allem durch Klarheit und Einfachheit in den Gedankengängen und Ideen besticht. Mathematisch-physikalisch erklärte er auch die Ablenkung der Polarisationsebene des Lichtes durch elektrische und magnetische Kräfte. In der Physik hielt er zeitlebens an der Newtonschen Fernwirkungstheorie fest. Für die Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ring löste er die Probleme mittels Einführung neuer Koordinaten in schwierige Gleichungen. Weiterhin klärte er seinerzeit unbekannte Fragen zu dem stationären Temperaturzustand in einem homogenen Körper.

der Mittelwert des Potentials über die Randfläche, und man hat insgesamt die Darstellung

$$\Phi(\vec{r}) - \overline{\Phi} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3 r'\, G_N(\vec{r},\vec{r}\,')\varrho(\vec{r}\,') - \int_{\partial V} \mathrm{d}f'\, G_N(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\Phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} \,. \quad (\mathbf{V}.2.44)$$

Das prinzipiell wichtige Ergebnis dieser Überlegungen soll abschließend kurz zusammengefasst werden:

> *Die Lösung eines elektrostatischen Randwertproblems für ein Volumen V, d.h. die Lösung der Poisson-Gleichung für das Potential Φ innerhalb von V setzt voraus, dass die Ladungsdichte ϱ in V* und *entweder das Potential Φ selbst (Dirichlet-Randbedingung) oder seine Normalenableitung $\partial\Phi/\partial n$ (Neumann-Randbedingung) auf dem Rand ∂V vorgegeben werden.*

Es gibt einige Randwertprobleme mit hoher Symmetrie, die „anschaulich“ gelöst werden können; diese Probleme sind für das physikalische Verständnis des Lösungsverfahrens besonders wertvoll. Sehr instruktiv ist insbesondere die folgende elementare Fagestellung.

■ **Beispiel:** Die Spiegelladung.

Wie lautet das Potential oberhalb einer geerdeten Metallfläche, wenn sich im Abstand d davon eine Punktladung q befindet?
Angenommen, die Metalloberfläche fällt mit der x-y-Ebene zusammen, und q befindet sich im Punkt $(0,0,d)$. Aufgrund der Erdung bildet die Metalloberfläche eine Äquipotentialfläche, die die Dirichlet-Randbedingung

$$\Phi(x,y,z=0) = 0$$

für das Potential Φ vermittelt, das im oberen Halbraum $z \geq 0$ zu bestimmen ist. Als weitere Randbedingung im Unendlichen hat man

$$\Phi \to 0 \qquad \text{für } (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \gg d \,.$$

Das Potential nur einer Punktladung q bei $(0,0,d)$, also

$$\widetilde{\Phi}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{1/2}} \,,$$

erfüllt die erste Randbedingung jedoch nicht. Denn die Ladung q verschiebt Ladungsträger im Metall derart, dass auf der Metalloberfläche eine Flächenladungsdichte σ induziert wird. Der Verlauf der elektrischen Feldlinien wird dann von der induzierenden Ladung q und der induzierten Ladungsdichte σ gemeinsam so bestimmt, dass die Feldlinien senkrecht auf das Metall auftreffen, wie in der Abbildung **V**.3 dargestellt. Der Halbraum unterhalb der Metalloberfläche bleibt vollkommen feldfrei.
Es ist nun sehr leicht zu sehen, dass die an das Potential im *oberen* Halbraum gestellten Randbedingungen erfüllt werden, wenn man im *unteren* Halbraum symmetrisch zu der

Abbildung **V**.3: Zur Spiegelladung: Befindet sich eine Ladung q in Abstand d oberhalb einer geerdeten Metallplatte, so bildet diese Platte eine Äquipotentialfläche. Auf der Platte werden Oberflächenladungen induziert, die das Feld der Punktladung so verformen, dass alle Feldlinien senkrecht auf die Platte stoßen; der Raum unterhalb der Grenzfläche ist feldfrei. Platziert man eine fiktive „Spiegelladung“ $-q$ im Abstand d von der Grenzfläche unterhalb der realen Ladung, so ist das Feld, das diese beiden Ladungen *ohne* Anwesenheit der Metallplatte erzeugen würden, oberhalb der Platte identisch mit dem tatsächlichen Feld.

realen Ladung q eine fiktive „Spiegelladung“ $-q$ platziert und die Anwesenheit des Metalls ignoriert: Dann hat man

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{1/2}} - \frac{q}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{1/2}}\right] .$$

Da nun die Lösung eines Dirichlet-Randwertproblems eindeutig ist, ist $\Phi(x,y,z)$ das gesuchte Potential in Halbraum $z \geq 0$; im anderen Halbraum $z < 0$ besitzt es keine physikalische Bedeutung. Tatsächlich bildet dieses Potential (bis auf den Faktor $-q/\varepsilon_0$) die Dirichletsche Greensche Funktion (**V**.2.36) für die hier betrachtete Randbedingung; der Spiegelladungsterm entspricht genau dem Term $g_D(\vec{r},\vec{r}\,')$, mit dessen Hilfe die Randbedingung implementiet wird: Da die Spiegelladung im unteren Halbraum positioniert wird, erfüllt dieser Term im oberen Halbraum die geforderte Laplace-Gleichung (**V**.2.27).
Da das Innere das Metalls feldfrei bleibt, müssen alle Feldlinien, die von q ausgehen, an der Metalloberfläche enden, was bedeutet, dass die insgesamt induzierte Oberflächenladung genau $-q$ betragen muss. Das lässt sich nun leicht prüfen: Nach Abbildung **V**.4 gilt an der Oberfläche eines Metalls der Zusammenhang $\vec{E} = (\sigma/\varepsilon_0)\vec{n}$, so dass

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial n} . \qquad (\mathbf{V}.2.45)$$

Abbildung **V**.4: Zur Bestimmung der Oberflächenladungsdichte σ: Betrachtet wird ein Kästchen mit Grund- und Deckelfläche A, das beide Seiten eines kleinen Teilstücks einer Metalloberfläche umschließt, wobei seine Seitenflächen vernachlässigbar seien. Befindet sich innerhalb des Kästchens die Oberflächenladung Q, ergibt der Gaußsche Satz die Beziehung $E_n A = Q/\varepsilon_0$ für die Normalkomponente E_n des elektrischen Feldes an der Oberfläche, also $E_n = \sigma/\varepsilon_0$ mit $\sigma = Q/A$.

Diese Beziehung kann sofort ausgewertet werden: Man findet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q(z-d)}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}} + \frac{q(z+d)}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{3/2}}\right]_{z=0} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qd}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{3/2}} ,
\end{aligned}$$

und damit die gesuchte Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\frac{qd}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{3/2}} .$$

Die induzierte Gesamtladung ergibt sich durch Integration in ebenen Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}f\,\sigma &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \frac{qd}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}} \\
&= -qd\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r\, r}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}} \\
&= qd\,\frac{1}{\left(r^2+d^2\right)^{1/2}}\Bigg|_0^\infty \\
&= -q ,
\end{aligned}$$

Abbildung **V**.5: Die Oberflächen zweier halbseitig unendlich ausgedehnter, geerdeter Metallplatten liegen in den Ebenen $y = 0$ und $y = a$. Der Zwischenraum der Platten wird bei $x = 0$ durch einen Streifen abgeschlossen, auf dem ein Potential $\Phi_0(y)$ vorgegeben wird. Die Bestimmung des Potentials zwischen den Platten bildet ein typisches Dirichlet-Randwertproblem.

genau wie erwartet. Bemerkenswert ist auch, dass die Ladung q tatsächlich von ihrer eigenen Spiegelladung angezogen wird, da sie ja deren Feld erfährt; die anziehende Kraft

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}\vec{e}_z$$

ist genau die Kraft, die eine reale Ladung $-q$ an der gespiegelten Position $(0, 0, -d)$ auf q bei $(0, 0, d)$ ausüben würde. ■

V.3 Separation der Laplace-Gleichung

Während die Überlegungen des vorherigen Abschnitts vor allem Struktureinsicht geliefert haben, eignet sich die in diesem Abschnitt behandelte Methode der Separation der Laplace-Gleichung zur konkreten Lösung sehr vieler elektrostatischer Randwertaufgaben. Diese Separation soll hier sowohl in kartesischen als auch in Kugelkoordinaten vorgenommen werden.

■ **Beispiel:** Das Potential zwischen zwei Metallplatten.

Gegeben sind zwei halbseitig unendlich ausgedehnte, geerdete Metallplatten mit Oberflächen parallel zur x-z-Ebene, eine bei $y = 0$, die andere bei $y = a$. Der ladungsfreie Raum zwischen den Platten wird bei $x = 0$ durch einen unendlich langen, von beiden Platten isolierten Streifen abgeschlossen; auf diesem Streifen wird ein nur von der Höhe y abhängiges Potential $\Phi_0(y)$ vorgegeben. Wie lautet das Potential Φ zwischen den Platten, wenn vorausgesetzt wird, dass es für große x verschwinden soll?
Aufgrund der z-Unabhängigkeit der Anordnung, die in Abbildung **V**.5 skizziert wird, ist

zur Bestimmung des Potentials „nur“ eine zweidimensionale Laplace-Gleichung zu lösen,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi = 0 \ ,$$

wobei Dirichlet-Randbedingungen gestellt werden:

$$\begin{array}{lrcll} (i) & \Phi(x,0) & = & 0 & \\ (ii) & \Phi(x,a) & = & 0 & \\ (iii) & \Phi(0,y) & = & \Phi_0(y) & \\ (iv) & \Phi(x,y) & \to & 0 & \text{für } x \to \infty \ . \end{array}$$

Der *Separationsansatz* besteht nun darin, in einem ersten Schritt nur Lösungen dieser Gleichung zu suchen, die die Produktform

$$\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$$

besitzen, sich also als ein Produkt von zwei Funktionen darstellen lassen, die jeweils von nur einer der beiden Variablen abhängen. Einsetzen dieses Ansatzes in die Laplace-Gleichung ergibt

$$Y\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + X\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = 0 \ ;$$

nach Division durch XY hat man

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} \ .$$

Da aber die linke Seite dieser Gleichung nur von x und die rechte nur von y abhängt, kann sie nur erfüllt werden, wenn beide Seiten gleich einer gemeinsamen Konstanten c sind:

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} \ = \ c \ = \ -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} \ .$$

Damit separiert die partielle DGL in zwei gewöhnliche:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= \ \ cX \\ \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= -cY \ . \end{aligned}$$

Lösungen dieser Gleichungen sind, je nach Vorzeichen von c, trigonometrische Funktionen oder Exponentialfunktionen. Da zur Erfüllung der Randbedingungen in y-Richtung jedoch Funktionen $Y(y)$ benötigt werden, die mindestens zwei Nullstellen besitzen, muss die Separationskonstante c positiv sein; sei daher

$$c = k^2 \ .$$

Dann hat man zunächst die allgemeinen Lösungen

$$\begin{aligned} X(x) &= A\mathrm{e}^{kx} + B\mathrm{e}^{-kx} \\ Y(y) &= C\sin(ky) + D\cos(ky)\ . \end{aligned}$$

Nun werden die Randbedingungen ausgewertet: $Y(y=0)=0$ erfordert offenbar $D=0$. Die Bedingung $Y(y=a)=0$ erzwingt dann eine Diskretisierung der „Wellenzahl“ k, nämlich

$$k = \frac{n\pi}{a} \qquad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots\ .$$

Weiterhin ist $A=0$ wegen $X(x\to\infty)=0$. Damit hat man nun ein System von Produktlösungen der Laplace-Gleichung,

$$\Phi_n(x,y) = \mathrm{e}^{-n\pi x/a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \qquad , \qquad n = 1, 2, 3, \dots\ , \tag{**V**.3.1}$$

die jedoch nicht der bei $x=0$ gestellten Randbedingung (*iii*) genügen, also auf dem linken Rand der Anordnung nicht mit dem dort vorgegebenen Potential $\Phi_0(y)$ übereinstimmen. Um auch diese letzte Randbedingung erfüllen zu können, wird im zweiten Lösungsschritt die Linearität der Laplace-Gleichung ausgenutzt: Für jede „vernünftige“ Wahl der Koeffizienten c_n — was noch zu präzisieren bleibt — ist auch die Superposition

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-n\pi x/a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{**V**.3.2}$$

eine Lösung, und die Randbedingung (*iii*) erfordert

$$\Phi_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\ . \tag{**V**.3.3}$$

Das gestellte Randwertproblem ist gelöst, wenn es gelingt, die Koeffizienten c_n so zu bestimmen, dass diese Gleichung (**V**.3.3) erfüllt wird. Dazu wird nun die *Orthogonalität* der Funktionen

$$\widetilde{f}_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \qquad , \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{**V**.3.4}$$

auf dem Intervall $[0,a]$ ausgenutzt: Es gilt

$$\int_0^a \mathrm{d}y\ \widetilde{f}_n(y)\widetilde{f}_m(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \dfrac{a}{2} & \text{für } n = m\ . \end{cases} \tag{**V**.3.5}$$

Multipliziert man also die Bestimmungsgleichung (**V**.3.3) der Koeffizienten mit $\widetilde{f}_m(y)$ und intergriert, so lässt sich der Koeffizient c_m isolieren:

$$\begin{aligned} &\int_0^a \mathrm{d}y\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ \frac{a}{2}\delta_{nm} \\ = \quad &\int_0^a \mathrm{d}y\ \Phi_0(y)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\ ; \end{aligned}$$

das ergibt schließlich

$$c_m = \frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{d}y\ \Phi_0(y)\sin\Big(\frac{m\pi y}{a}\Big)\ .$$

Damit ist das Randwertproblem in größtmöglicher Allgemeinheit gelöst. Ein besonders einfacher Spezialfall ergibt sich, wenn auf dem linken Rand lediglich ein konstantes Potential „eingefüttert“ wird, wenn also

$$\Phi_0(y) \equiv \Phi_0 = const.$$

Dann findet man die Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2\Phi_0}{a}\int_0^a \mathrm{d}y\ \sin\Big(\frac{n\pi y}{a}\Big) \\ &= -\frac{2\Phi_0}{a}\,\frac{a}{n\pi}\,\cos\Big(\frac{n\pi y}{a}\Big)\Big|_0^a \\ &= -\frac{2\Phi_0}{n\pi}\Big(\cos(n\pi)-1\Big) \\ &= \begin{cases} 0 & ,\ n \text{ gerade} \\ \dfrac{4\Phi_0}{n\pi} & ,\ n \text{ ungerade}\ , \end{cases} \end{aligned}$$

und die allgemeine Entwicklung (**V**.3.2) erhält hier die konkrete Gestalt

$$\Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-n\pi x/a}\sin\Big(\frac{n\pi y}{a}\Big)\ .$$

Da die Koeffizienten nur relativ langsam, nämlich wie $1/n$ abfallen, wird man allerdings relativ viele Terme dieser Entwicklung berücksichtigen müssen, um das Potential in guter Näherung darstellen zu können. ■

Es lohnt sich, dieses Beispiel noch einmal mit einem mathematisch geschärften Auge zu betrachten.[9] Offensichtlich ist, dass die Darstellung (**V**.3.3) *nicht* punktweise, d.h. für jedes einzelne Argument y, richtig sein kann: Für jede der Basisfunktionen (**V**.3.4) gilt $\widetilde{f}_n(0) = 0$, wogegen $\Phi_0(0)$ beliebig sein kann. Stattdessen wird für die allgemeine Reihenlösung (**V**.3.2) ein anderer Konvergenzbegriff benötigt, der hier kurz skizziert werden soll. Dazu werden die folgenden Begriffe aus der Funktionalanalysis benötigt:

(1) Eine (reelle oder komplexe) Funktion $f(x)$ heißt quadratintegrabel *auf einem Intervall $[a,b]$, falls*

$$\int_a^b \mathrm{d}x\,|f(x)|^2 < \infty\ .$$

[9] Die folgenden recht technischen Bemerkungen dürfen bei ersten Lesen übersprungen werden. Die darin zusammengestellten Hintergrundinformationen sind für das Erlernen der Separation der Laplace-Gleichung nicht erforderlich. Sie werden vielleicht erst in einem späteren Stadium des Physikstudiums wirklich interessant, wenn es nämlich darum geht, die mathematische Formulierung der Quantentheorie tiefer zu durchdringen. Aber man kann sie doch sicher trotzdem schon einmal zur Kenntnis nehmen?

(2) Ein System quadratintegrabler Funktionen $\{f_n(x)\}$ *heißt* orthonormal *auf* $[a,b]$*, falls*

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f_n^*(x) f_m(x) = \delta_{nm} \ .$$

(3) Ein System quadratintegrabler Funktionen $\{f_n(x)\}$ *heißt* vollständig *auf* $[a,b]$*, falls sich für jede quadratintegrable Funktion* $g(x)$ *Koeffizienten* c_n *finden lassen mit der Eigenschaft, dass die Reihe*

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n f_n(x)$$

„im quadratischen Mittel" gegen g *konvergiert, d.h.*

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}x\, |g(x) - g_N(x)|^2 = 0 \ .$$

Ein System quadratintegrabler Funktionen mit den Eigenschaften (2) und (3) heißt „vollständiges Orthonormalsystem" (VONS).

Im vorherigen Beispiel wurde die vorzugebende Randwertfunktion $\Phi_0(y)$ implizit als quadratintegrabel im Sinne der Definition *(1)* vorausgesetzt; solche quadratintegrablen Funktionen erlauben eine Darstellung der Form (**V**.3.3). Interessant ist, dass die auf einem Intervall quadratintegrablen Funktionen einen („unendlichdimensionalen") *Vektorraum* bilden. So können die trigonometrischen Funktionen (**V**.3.4) als eine *Basis* des Vektorraumes der auf $[0,a]$ quadratintegrablen Funktionen angesehen werden; die Reihe (**V**.3.3) stellt den Vektor $\Phi_0(y)$ als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.
Die Parallelen zur linearen Algebra reichen noch weiter: Auf dem Vektorraum der auf $[a,b]$ quadratintegrablen Funktionen wird durch

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, f^*(x) g(x) \qquad (\mathbf{V}.3.6)$$

ein *Skalarprodukt* definiert.[10] Der unter Punkt *(2)* eingeführte Begriff der Orthonormalität von Funktionen entspricht daher genau dem der Orthonormalität von Vektoren in Räumen endlicher Dimension. Die Beziehung (**V**.3.5) besagt also, dass das Basissystem (**V**.3.4) zwar orthogonal, aber nicht normiert ist. Diese Normierung lässt sich jedoch leicht nachholen: Die Funktionen

$$f_n(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\Big(\frac{n\pi y}{a}\Big) \qquad , \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (\mathbf{V}.3.7)$$

[10]Dabei muss man ein wenig aufpassen: Die Positiv-Definitheit des Skalarproduktes erfordert, dass $\langle f|f\rangle = 0$ genau dann, wenn $f = 0$. Hier aber ist $\langle f|f\rangle = 0$ auch dann, wenn f „nur auf einer Menge vom Maß Null" von Null verschieden ist. Um einen Vektorraum mit Skalarprodukt zu erhalten, muss daher vereinbart werden, dass alle Funktionen, die sich nur auf einer solchen Nullmenge unterscheiden, den *gleichen Vektor* repräsentieren.

bilden ein orthonormales System auf $[0, a]$ im Sinne der Definition *(2)*.
Eine entscheidend wichtige Frage ist, ob ein gegebenes System orthonormaler Funktionen auch *vollständig* ist, ob sich also jede quadratintintegrable Funktion nach ihnen entwickeln lässt. Die positive Beantwortung dieser Frage verlangt tiefergehende Mathematik; für das System (**V**.3.7) ist das die Theorie der Fourier-Reihen. Die nicht weniger wichtige Frage, in welchem Sinne die Entwicklung einer quadratintegrablen Funktion nach einem VONS zu verstehen ist, wird unter Punkt *(3)* geklärt: *Nicht* im Sinne der punktweisen Konvergenz, sondern im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel.
Nun kann endlich auch die im Beispiel aufgeworfene Frage geklärt werden, welche Wahlen der Koeffizienten c_n auf „vernünftige“ Lösungen (**V**.3.2) der Laplace-Gleichung führen: Quadratintegrabilität erfordert offenbar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \; . \tag{\textbf{V}.3.8}$$

Und noch eine weitere interessante Beobachtung ist an dieser Stelle möglich: Hat man ein VONS $\{f_n(x)\}$, so findet man einerseits für jede quadratintegrable Funktion $g(x)$ eine Entwicklung

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \; , \tag{\textbf{V}.3.9}$$

andererseits erhält man daraus die Koeffizienten c_n mit Hilfe der Orthonormalität:

$$c_n = \int_a^b \mathrm{d}x \, f_n^*(x) g(x) \; . \tag{\textbf{V}.3.10}$$

Durch Einsetzen in die Entwicklung (**V**.3.9) ergibt sich daraus formal (!) die Beziehung

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b \mathrm{d}x' \, f_n^*(x') g(x') \right) f_n(x) \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x' \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x') f_n(x) \right) g(x') \; , \end{aligned} \tag{\textbf{V}.3.11}$$

woraus sich durch Vergleich mit der Darstellung (**V**.2.16) der δ-Funktion die sehr wichtige Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x') f_n(x) = \delta(x - x') \tag{\textbf{V}.3.12}$$

ablesen lässt, die als *Vollständigkeitsrelation* bezeichnet wird: Das ist die Eigenschaft, die ein Orthonormalsystem $\{f_n(x)\}$ besitzen muss, um vollständig zu sein!
Nach diesem mathematischen Exkurs nun aber zurück zur konkreten Durchführung der Separation der Laplace-Gleichung. Nachdem das vorherige Beispiel das prinzipielle Vorgehen verdeutlich hat, bereitet es keine große Mühe mehr, dieses Beispiel zu einer „echt“ dreidimensionalen Aufgabe auszuweiten:

Abbildung **V**.6: Ein dreidimensionales Dirichlet-Randwertproblem in kartesischen Koordinaten: Ein rechteckiger metallischer Hohlleiter mit Seitenlängen a und b ist in positive x-Richtung unendlich lang ausgedehnt. Die Seitenstreifen sind geerdet, liegen also auf dem Potential $\Phi = 0$, aber auf der Abschlussfläche bei $x = 0$ wird ein beliebiges Potential $\Phi_0(x, y)$ eingespeist. Fordert man noch, dass das Potential im Innern des Hohlleiters für $x \to \infty$ verschwindet, so ist es durch diese Randbedingungen eindeutig festgelegt.

■ **Beispiel:** Das Potential in einem rechteckigen Hohlleiter.

Ein in positive x-Richtung unendlich langer rechteckiger metallischer Hohlleiter mit den Seitenlängen a und b ist geerdet, aber auf seinem sein Abschluss bei $x = 0$ wird ein Potential $\Phi_0(y, z)$ vorgegeben, wie in Abbildung **V**.6 skizziert. Wie lautet dann das Potential $\Phi(x, y, z)$ im Inneren dieses Hohlleiters?
Man hat also nun die Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{array}{rlcll} (i) & \Phi(x,0,z) & = & 0 & \\ (ii) & \Phi(x,a,z) & = & 0 & \\ (iii) & \Phi(x,y,0) & = & 0 & \\ (iv) & \Phi(x,y,b) & = & 0 & \\ (v) & \Phi(0,y,z) & = & \Phi_0(y,z) & \\ (vi) & \Phi(x,y,z) & \to & 0 & \text{für } x \to \infty \end{array}$$

und kann sich bei der Lösung des Randwertproblems sehr weitgehend an dem vorherigen Beispiel orientieren: Ausgangspunkt ist der Separationsansatz

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \; .$$

Einsetzen in die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ und Division durch $\Phi = XYZ$ führt auf die Beziehung

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = 0 \; ,$$

die, weil jeder Summand hierin von einer anderen Variablen abhängt, in drei gewöhnliche DGLn separiert:

$$\begin{aligned}\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= c_1\\ \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= c_2\\ \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} &= c_3\ ,\end{aligned}$$

wobei

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0\ .$$

Da nun in y- und in z-Richtung wegen der Randbedingungen trigonometrische Funktionen benötigt werden, müssen die Separationskonstanten c_2 und c_3 negativ sein; man setze daher

$$\begin{aligned}c_2 &= -k^2\\ c_3 &= -l^2\\ c_1 &= k^2 + l^2\ .\end{aligned}$$

Das führt auf die allgemeinen Lösungen

$$\begin{aligned}X(x) &= A\exp\left(\sqrt{k^2+l^2}x\right) + B\exp\left(-\sqrt{k^2+l^2}x\right)\\ Y(y) &= C\sin(ky) + D\cos(ky)\\ Z(z) &= E\sin(lz) + F\cos(lz)\ .\end{aligned}$$

Nun werden die Randbedingungen implementiert: (i) und (iii) erfordern $D = 0$ und $F = 0$; (ii) und (iv) verlangen $k = n\pi/a$ und $l = m\pi/b$ mit positiven ganzen Zahlen n, m. Wegen (vi) ist weiterhin $A = 0$. Damit hat man Produktlösungen der Laplace-Gleichung mit zwei Indizes n, m, die allerdings die Bedingung (v) auf dem linken Rand noch nicht erfüllen:

$$\Phi_{nm}(x,y,z) = \exp\left(-\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}\,x\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\ . \qquad (\mathbf{V}.3.13)$$

Ein allgemeiner Lösungsansatz besitzt daher die Form

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\Phi_{nm}(x,y,z)\ .$$

Die Koeffizienten c_{nm} müssen dabei so gewählt werden, dass die auch Randbedingung (v) erfüllt wird. Diese Forderung verlangt die Darstellung

$$\Phi_0(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\ ,$$

erneut im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel. Mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehungen (**V**.3.5) lassen sich die für eine beliebige (quadratintegrable) Randfunktion $\Phi_0(y,z)$ benötigten Koeffizienten sofort bestimmen:

$$c_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^b \mathrm{d}z\, \Phi_0(y,z) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right) \ .$$

Wählt man insbesondere wieder

$$\Phi_0(x,y) \equiv \Phi_0 = const. \ ,$$

ergibt sich

$$c_{nm} = \begin{cases} \dfrac{16\Phi_0}{\pi^2 nm} & , \ n \text{ und } m \text{ ungerade} \\ 0 & , \ \text{sonst} \ , \end{cases}$$

und das Potential im Inneren des Hohlleiters wird dargestellt durch die Reihe

$$\Phi(x,y,z) = \frac{16\Phi_0}{\pi^2} \sum_{n,m=1,3,5,\ldots} \frac{1}{nm} \exp\left(-\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}\, x\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right) \ .$$

Auffallend ist, dass die Bestimmung dieses Potentials im Inneren des Hohleiters nach genau dem gleichen Schema verläuft wie die Bestimmung des Potentials zwischen zwei Metallplatten im vorherigen Beispiel; in beiden Fällen wurde die allgemeine Lösung nach einem geeigneten System orthogonaler Funktionen entwickelt. ■

Die Lösung der vorherigen Beispielaufgaben war deswegen „einfach“, weil dabei die kartesischen Koordinaten der Geometrie der Problemstellung angepasst waren; genau hierin lag der Grund für die einfache Separierbarkeit der jeweils auftretenden Laplace-Gleichungen. Sehr häufig wird man jedoch auch mit Problemen konfrontiert, die eine sphärische oder mindestens Zylindersymmetrie aufweisen. Für die Separation der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten steht ein sehr mächtiges Werkzeug zur Verfügung, das nun bereitgestellt werden soll. Ausgangspunkt dafür ist die bekannte Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten *(Übungsaufgabe!)*:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \ . \end{aligned} \qquad (\mathbf{V}.3.14)$$

Beschränkt man sich vorerst auf Problemstellungen mit Azimutalsymmetrie, so hängt das Potential $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ nicht mehr vom Winkel φ ab. Der Separationsansatz

$$\Phi(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta) \qquad (\mathbf{V}.3.15)$$

überführt die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(r,\vartheta) = 0 \qquad (\mathbf{V}.3.16)$$

dann in die Beziehung

$$\Theta(\vartheta)\,\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}rR(r)+\frac{R(r)}{r^2}\,\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right)\Theta(\vartheta)=0\;, \tag{**V**.3.17}$$

oder, nach Separation der Variablen, in

$$\frac{r^2}{rR(r)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}rR(r)=-\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\,\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right)\Theta(\vartheta)\;. \tag{**V**.3.18}$$

Es folgt das bekannte Argument: Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von der Variablen r ab, die rechte nur von der anderen Variablen ϑ, so dass beide Seiten gleich einer gemeinsamen Konstanten sein müssen. Bezeichnet man diese Separationskonstante als $\ell(\ell+1)$ — der Grund für diese künstlich erscheinende Setzung wird bald sichtbar werden —, so separiert die Laplace-Gleichung (**V**.3.16) in die beiden gewöhnlichen DGLn

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}rR(r)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}rR(r)=0 \tag{**V**.3.19}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right)\Theta(\vartheta)=-\ell(\ell+1)\sin\vartheta\;\Theta(\vartheta)\;. \tag{**V**.3.20}$$

Die Radialgleichung (**V**.3.19) wird nun durch die naheliegende Substitution

$$R(r)=\frac{1}{r}u(r) \tag{**V**.3.21}$$

in die einfacher aussehende Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}u(r)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u(r)=0 \tag{**V**.3.22}$$

überführt, der man unmittelbar ansieht, dass sie Lösungen der Form

$$u(r)=r^s \tag{**V**.3.23}$$

besitzen muss, wobei die Exponenten s noch zu bestimmen sind. Einsetzen in die Gleichung (**V**.3.22) führt auf die Beziehung

$$s(s-1)=\ell(\ell+1)\;, \tag{**V**.3.24}$$

also auf

$$s^2-s+\frac{1}{4}=\ell^2+\ell+\frac{1}{4}\;; \tag{**V**.3.25}$$

daraus folgt

$$s-\frac{1}{2}=\pm\left(\ell+\frac{1}{2}\right) \tag{**V**.3.26}$$

und daher $s = \ell + 1$ oder $s = -\ell$. Damit liefert der Ansatz (**V**.3.21) schließlich die allgemeine Lösung der Radialgleichung (**V**.3.19):

$$R(r) = Ar^{\ell} + \frac{B}{r^{\ell+1}} \; . \tag{\textbf{V}.3.27}$$

Die Zahl ℓ, die sich aus der Separationskonstanten ergibt, bleibt an dieser Stelle noch unbestimmt.
Die Winkelgleichung (**V**.3.20) ist nun deutlich anspruchsvoller. Setzt man darin $x = \cos\vartheta$, so wird das ϑ-Intervall $[0, \pi]$ in das x-Intervall $[-1, 1]$ transformiert; die Lösungen werden dann in der Form $\Theta(\vartheta) = P(\cos\vartheta) = P(x)$ geschrieben. Mit den einfachen Umformungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} = -\sin\vartheta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{\textbf{V}.3.28}$$

und

$$\sin\vartheta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} = -(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{\textbf{V}.3.29}$$

erhält die Winkelgleichung dann ihre Standardform

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(x)\right) + \ell(\ell+1)P(x) = 0 \; , \tag{\textbf{V}.3.30}$$

die als *Legendresche Differentialgleichung* bekannt ist und sehr genau untersucht worden ist. Zwar kann sie für beliebige Werte des Parameters ℓ gelöst werden, aber Lösungen, die auf dem benötigten Intervall $[-1, 1]$ nichtsingulär und *quadratintegrabel* sind, existieren nur für *ganzzahliges* ℓ, also nur für

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots \; . \tag{\textbf{V}.3.31}$$

Diese regulären Lösungen sind Polynome, die als *Legendre-Polynome* bezeichnet werden; sie besitzen die explizite Darstellung

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\ell (x^2-1)^\ell \; . \tag{\textbf{V}.3.32}$$

Damit ist das ℓ-te Legendre-Polynom ein Polynom vom Grad ℓ:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= (3x^3 - 1)/2 \\
P_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \\
P_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \\
P_5(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8 \; .
\end{aligned} \tag{\textbf{V}.3.33}$$

Die Normierung dieser Polynome ist so gewählt, dass

$$P_\ell(1) = 1 \; . \tag{\textbf{V}.3.34}$$

Sie besitzen zudem zwei Eigenschaften, die hier entscheidend wichtig sind: Sie bilden ein *Orthogonalsystem* auf dem Intervall $[-1,1]$, denn es gilt

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_\ell(x) P_{\ell'}(x) \;=\; \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta\, P_\ell(\cos\vartheta) P_{\ell'}(\cos\vartheta) \;=\; \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}\;; \qquad (\mathbf{V}.3.35)$$

und sie sind *vollständig* auf $[-1,1]$, so dass jede auf diesem Intervall reguläre und quadratintegrable Funktion nach ihnen entwickelt werden kann.[11] Damit besitzt eine Laplace-Gleichung (**V**.3.16) mit Azimutalsymmetrie Produktlösungen der Form

$$\Phi_\ell(r,\vartheta) = \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\vartheta)\;, \qquad (\mathbf{V}.3.36)$$

die hier an die Stelle der früheren Produktlösungen (**V**.3.1) und (**V**.3.13) für kartesische Koordinaten treten, und die allgemeine (physikalisch sinnvolle) Lösung der Gleichung kann nach diesen Produktlösungen entwickelt werden. Daher besitzt das Potential für ein Randwertproblem mit Azimutalsymmetrie *immer* die Form

$$\boxed{\Phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\vartheta)} \qquad (\mathbf{V}.3.37)$$

Mit diesem Werkzeug lässt sich nun eine Fülle von Randwertproblemen schnell und elegant lösen.

■ **Beispiel:** Das Potential im Innenraum einer Kugelschale.

Auf der Innenseite einer metallenen Kugelschale vom Radius R herrsche ein ϑ-abhängiges Potential $\Phi_0(\vartheta)$. Wie lautet dann das Potential $\Phi(r,\vartheta)$ in Innenraum der Kugel?
In diesem Fall muss jeder Koeffizient B_ℓ der allgemeinen Entwicklung (**V**.3.37) verschwinden, da andernfalls das Potential im Kugelmittelpunkt singulär würde. Man hat also nun

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell\, r^\ell\, P_\ell(\cos\vartheta)$$

und muss damit für $r = R$ die Randbedingung erfüllen:

$$\Phi_0(\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell\, R^\ell\, P_\ell(\cos\vartheta)\;. \qquad (\mathbf{V}.3.38)$$

[11] Die Legendresche Differentialgleichung (**V**.3.30) ist eine DGL zweiter Ordnung, besitzt also auch für ganzzahliges ℓ *zwei* linear unabhängige Lösungen. Die weiteren Lösungen $Q_\ell(x)$, die als Legendre-Funktionen zweiter Art bezeichnet werden, werden jedoch für $x \to \pm 1$ singulär und sind daher auszuschließen. So ist z.B.

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\;.$$

Aus dieser Forderung ergeben sich die gesuchten Koeffizienten A_ℓ mit Hilfe der Orthogonalität (**V**.3.35) der Legendre-Polynome:

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta\, P_\ell(\cos\vartheta)\Phi_0(\vartheta) = A_\ell R^\ell \frac{2}{2\ell+1}\ ,$$

so dass

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2R^\ell}\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta\, P_\ell(\cos\vartheta)\Phi_0(\vartheta)\ .$$

Damit ist die Randwertaufgabe bereits allgemein gelöst. — Ein einfacher Spezialfall: Für ein Randpotential

$$\begin{aligned}\Phi_0(\vartheta) &= c\,\sin^2(\vartheta/2)\\ &= \frac{c}{2}(1-\cos\vartheta)\\ &= \frac{c}{2}\Big(P_0(\cos\vartheta) - P_1(\cos\vartheta)\Big)\end{aligned}$$

mit einer Konstanten c erhält man durch Vergleich mit der Entwicklung (**V**.3.38) die Koeffizienten

$$A_0 = \frac{c}{2}\quad,\quad A_1 = -\frac{c}{2R}\quad,\quad A_\ell = 0 \ \text{ für } \ell \geq 2\ ,$$

so dass

$$\Phi(r,\vartheta) = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\cos\vartheta\right)\ .$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dieser Ausdruck tatsächlich eine Lösung der Laplace-Gleichung ist. ■

■ **Beispiel:** Eine Metallkugel in einem elektrischen Feld.

Ein ungeladene Metallkugel vom Radius R wird in ein zuvor homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$ gebracht. Dadurch werden Leitungselektronen auf die „südliche“ Halbkugel verschoben, so dass auf der „nördlichen“ Halbkugel eine positive Ladung auftritt. Diese induzierten Ladungen verzerren ihrerseits das Feld in der Umgebung der Kugel. Wie lautet das Potential außerhalb der Kugel?
Der Mittelpunkt der Kugel soll mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallen. Da die Metallkugel einen Äquipotentialkörper bildet, kann $\Phi = 0$ für die Kugel gesetzt werden; aus Symmetriegründen ist dann $\Phi = 0$ in der gesamten Ebene $z = 0$. Für sehr große Abstände von der Kugel wird der Einfluss der Influenzladungen beliebig klein, also hat man $\Phi \to -E_0 z + const.$ für $r \to \infty$. Wegen $\Phi = 0$ für $z = 0$ ist $const. = 0$. Also hat man die Randbedingungen

$$\begin{aligned}&(i) && \Phi &&= 0 && \text{für } r = R\\ &(ii) && \Phi &&\to -E_0 r\cos\vartheta && \text{für } r \gg R\ .\end{aligned}$$

Die erste dieser Bedingungen verlangt

$$A_\ell R^\ell + \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} = 0 \; ,$$

also

$$B_\ell = -A_\ell R^{2\ell+1} \; .$$

Damit erhält die Entwicklung (**V**.3.37) hier die Gestalt

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \left(r^\ell - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\vartheta) \; .$$

Für $r \gg R$ ist der zweite Term in der Klammer vernachlässigbar; die Randbedingung (ii) verlangt daher

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\vartheta) = -E_0 r \cos\vartheta \; .$$

Da nun $\cos\vartheta = P_1(\cos\vartheta)$, folgt sofort

$$A_\ell = \begin{cases} -E_0 & , \quad \ell = 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \; . \end{cases}$$

Damit ist das Potential vollständig bekannt:

$$\Phi(r,\vartheta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos\vartheta \; .$$

Der erste Beitrag, $\Phi_{\text{ext}}(r,\vartheta) = -E_0 r \cos\vartheta$, stammt von dem ursprünglichen äußeren Feld; der zweite Beitrag, $\Phi_{\text{ind}}(r,\vartheta) = E_0 R^3 \cos\vartheta / r^2$, ist auf die induzierten Ladungen zurückzuführen. Die Oberflächenladungsdichte ergibt sich nach Gleichung (**V**.2.45) zu

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) &= -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &= \varepsilon_0 E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right)_{r=R} \cos\vartheta \\ &= 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta \; ; \end{aligned}$$

diese Ladungsdichte ist wie erwartet auf der „Nordhalbkugel“ positiv und auf der „Südhalbkugel“ negativ. ■

Abbildung **V**.7: Zur Multipol-Entwicklung einer Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}\,')$, die in einer Umgebung des Koordinatenursprungs lokalisiert ist: Aus sehr großer Enternung wird nur die Gesamtladung wahrgenommen. Je näher aber der Beobachtungspunkt $\vec{r}$ der Verteilung kommt, umso höhere Momente dieser Verteilung werden relevant.

V.4 Die Multipol-Entwicklung

Das Potential einer in der Umgebung des Koordinatenursprungs lokalisierten Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}\,')$, das im Unendlichen verschwinden soll, lautet bekanntlich

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \; . \tag{**V**.4.1}$$

Angenommen, die Ladungsverteilung ist inhomogen; der „Schwerpunkt“ der positiven Teilladungen falle nicht mit dem der negativen zusammen. Wenn man dieses Potential aus sehr großer Entfernung misst, so wird man dennoch nur das wie $1/r$ abfallende Coulomb-Potential der Gesamtladung wahrnehmen. Erst bei Annäherung an die Ladungsverteilung werden ihre Details spürbar. Um diesen in Abbildung **V**.7 skizzierten Grundgedanken mathematisch präzisieren zu können, wird nun der in dem Ausdruck (**V**.4.1) auftretende Nenner für $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$ um $\vec{r}\,' = \vec{0}$ herum entwickelt: Vorausgesetzt wird also, dass der Beobachtungspunkt $\vec{r}$ weit von allen Quellpunkten $\vec{r}\,'$ entfernt ist.
Zur Durchführung dieser Entwicklung wird noch einmal an die vielleicht gewöhnungsbedürftige, aber sehr bequeme Form (**I**.3.7) der Taylorentwicklung einer glatten Funktion $f(x)$ erinnert:

$$f(x+a) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^k f(x) \;=\; \exp\left(a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right) f(x) \; . \tag{**V**.4.2}$$

Diese Form macht offensichtlich, wie eine entsprechende Entwicklung einer Funktion, deren Argument ein *Vektor* ist, durchzuführen ist:

$$f(\vec{r}+\vec{a}) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \right)^k f(\vec{r}) \;=\; \exp\left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \right) f(\vec{r}) \; . \tag{**V**.4.3}$$

Damit hat man sofort auch die gesuchte Entwicklung

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= \exp\left(-\vec{r}\,'\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{1}{r}\\ &= \frac{1}{r}-\left(\vec{r}\,'\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\left(\vec{r}\,'\cdot\vec{\nabla}\right)^2\frac{1}{r}+\dots\ .\end{aligned} \tag{**V**.4.4}$$

Schreibt man das in Koordinaten aus, erhält man die vertraute Form

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{3}x_i'\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}x_j'x_i'\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}\frac{1}{r}+\dots\ . \tag{**V**.4.5}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}=-\frac{x_i}{r^3} \tag{**V**.4.6}$$

sowie

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}\frac{1}{r}=\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}\ , \tag{**V**.4.7}$$

so dass die führenden Terme der Entwicklung (**V**.4.5) eine recht kompakte Form erhalten:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}}{r^3}+\frac{3(\vec{r}\,'\cdot\vec{r})^2-r'^2r^2}{2r^5}+\dots\ . \tag{**V**.4.8}$$

Setzt man diese Reihe in den Ausdruck (**V**.4.1) für das Potential ein, so erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned}4\pi\varepsilon_0\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\,\varrho(\vec{r}\,')\\ &\quad+\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int \mathrm{d}^3r'\,\vec{r}\,'\varrho(\vec{r}\,')\\ &\quad+\frac{1}{2r^5}\int \mathrm{d}^3r'\Big(3(\vec{r}\,'\cdot\vec{r})^2-r'^2r^2\Big)\varrho(\vec{r}\,')\\ &\quad+\dots\ .\end{aligned} \tag{**V**.4.9}$$

Das ist die *kartesische Multipol-Entwicklung* des Potentials. Der führende Term, der wie $1/r$ abfällt, beschreibt lediglich die Gesamtladung (also den „Monopol“):

$$q=\int \mathrm{d}^3r'\,\varrho(\vec{r}\,')\ . \tag{**V**.4.10}$$

Der zweite Term, der sich wie $1/r^2$ verhält und damit stärker abfällt als der erste, beschreibt das *Dipolmoment* der Ladungsverteilung bezüglich des gewählten Koordinatenursprungs, also den „Ladungsschwerpunkt“:

$$\vec{p}=\int \mathrm{d}^3r'\,\vec{r}\,'\varrho(\vec{r}\,')\ . \tag{**V**.4.11}$$

Der dritte Term wird so umgeformt, dass die („ungestrichenen“) Koordinaten des Beobachtungspunktes abfaktorisiert werden können:

$$\begin{aligned} & \int \mathrm{d}^3r' \Big(3(\vec{r}\,'\cdot\vec{r})^2 - r'^2 r^2\Big)\varrho(\vec{r}\,') \\ = & \int \mathrm{d}^3r' \Big(3\sum_{i,j=1}^{3} x'_i x_i x'_j x_j - r'^2 \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} x_i x_j\Big)\varrho(\vec{r}\,') \\ = & \sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \int \mathrm{d}^3r' \Big(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij}\Big)\varrho(\vec{r}\,') \ . \end{aligned} \tag{**V**.4.12}$$

Das hier auftauchende Integral definiert die Komponenten Q_{ij} des Tensors der *Quadrupolmomente*:

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3r' \Big(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij}\Big)\varrho(\vec{r}\,') \ . \tag{**V**.4.13}$$

Da dieser Tensor offensichtlich *symmetrisch* ($Q_{ij} = Q_{ji}$) und *spurfrei* ($\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0$) ist, besitzt er nur fünf unabhängige Einträge.
Die Multipol-Entwicklung schlüsselt somit die geometrische Komplexität der Ladungsverteilung auf, wobei der Beitrag des 2^n-Pols wie $1/r^{n+1}$ abfällt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5} + \ldots\right] \ . \tag{**V**.4.14}$$

Man beachte aber, dass die Details dieser Entwicklung *sehr* stark von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängen: Eine Punktladung q bei $\vec{r}\,' = \vec{0}$ liefert nur den Monopolterm, eine bei $\vec{r}\,' \neq \vec{0}$ dagegen die gesamte Reihe!
Sehr häufig ist die Verwendung von kartesischen Koordinaten jedoch unpraktisch. Die höheren Momente erhalten in kartesischen Koordinaten eine recht komplizierte Form; man darf erwarten, dass sich in sphärischen Polarkoordinaten einige Vereinfachungen ergeben. Ausgangspunkt einer „sphärischen Multipol-Entwicklung“ ist nun eine andere, ebenfalls sehr wichtige Entwicklung von $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$: Fixiert man den Quellpunkt $\vec{r}\,'$ auf der z-Achse und variiert den Beobachtungspunkt $\vec{r}$, so wird dieser Ausdruck azimutalsymmetrisch. Gemäß der allgemeinen Gleichung (**V**.3.37) existiert also eine Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\gamma) \ , \tag{**V**.4.15}$$

wobei $\gamma = \angle(\vec{r},\vec{r}\,')$ den von $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Die Koeffizienten A_ℓ und B_ℓ lassen sich nun bestimmen, indem man $\gamma = 0$ setzt, so dass $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$ Punkte auf der positiven z-Achse beschreiben. Mit den Bezeichungen

$$r_> = \max\{|\vec{r}|,|\vec{r}\,'|\} \qquad \text{und} \qquad r_< = \min\{|\vec{r}|,|\vec{r}\,'|\}$$

erhält man für $\gamma = 0$ sofort die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} &= \frac{1}{r_>} \frac{1}{1 - \dfrac{r_<}{r_>}} \\ &= \frac{1}{r_>} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^{\ell} , \end{aligned} \tag{**V**.4.16}$$

die genau die verlangte Form (**V**.4.15) besitzt. Daher erhält man die gesuchte Entwicklung für $\gamma \neq 0$ einfach durch Multiplikation der einzelnen Terme mit $P_\ell(\cos\gamma)$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} \, P_\ell(\cos\gamma) \; . \tag{**V**.4.17}$$

Diese bemerkenswerte Identität besagt, dass $1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ als „erzeugende Funktion“ der Legendre-Polynome aufgefasst werden kann. Sie führt nun auf eine weitere Form der Multipol-Entwicklung des Fernfeld-Potentials einer lokalisierten Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}\,')$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} \int \mathrm{d}^3 r' \, r'^{\ell} P_\ell(\cos\gamma) \varrho(\vec{r}\,') \; , \end{aligned} \tag{**V**.4.18}$$

wobei natürlich $|\vec{r}\,| > |\vec{r}\,'|$ vorausgesetzt wird. Es ist allerdings zu beachten, dass der Winkel $\gamma = \angle(\vec{r}, \vec{r}\,')$ vom Quellpunkt $\vec{r}\,'$ bestimmt wird und mit diesem variiert, so dass die hier auftretenden Integrale nicht immer einfach zu berechnen sind.[12]

V.5 Arbeit und Energie in der Elektrostatik

Gegeben seien stationäre (ruhende) Punktladungen $q_1, \ldots, q_N$, die zusammen ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ erzeugen; in diesem Feld wird eine Probeladung q von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$ bewegt. Dabei wirkt auf die Ladung die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$; gegen diese Kraft muss die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E} \\ &= q\Big(\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a) \Big) \end{aligned} \tag{**V**.5.1}$$

verrichtet werden. Liegt das Nullniveau des Potentials im Unendlichen, benötigt man also die Arbeit

$$W = q\,\Phi(\vec{r}_b) \; , \tag{**V**.5.2}$$

[12] Eine für praktische Zwecke gut geeignete Form der Multipol-Entwicklung ergibt sich, wenn man den Faktor $P_\ell(\cos\gamma)$ in dem Ausdruck (**V**.4.18) nach den Kugelfächenfunktionen $Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$ entwickelt; diese bilden ein vollständiges System auf der Oberfläche der Einheitskugel. Näheres dazu findet man in dem Standardwerk *Klassische Elektrodynamik* von John David Jackson.

um die Ladung q aus dem Unendlichen nach $\vec{r}_b$ zu bringen.
Es sollen nun Ladungen $q_1, \ldots, q_N$ aus dem Unendlichen an Orte $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ gebracht werden. Der „Antransport“ der ersten Ladung verlangt noch keine Arbeit, da ja zunächst kein Feld vorhanden ist. Für den Transport der zweiten Ladung in dem Feld, das von der ersten erzeugt wird, benötigt man nach Gleichung (**V**.5.2) die Arbeit

$$W_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \; , \tag{**V**.5.3}$$

für den Transport der dritten dann

$$W_3 = q_3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \right) \; , \tag{**V**.5.4}$$

und für den der vierten

$$W_4 = q_4 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|} + \frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|} \right) \; . \tag{**V**.5.5}$$

Die für die Zusammenführung dieser Ladungen notwendige Gesamtenergie enthält offensichtlich jede „Paarwechselwirkung“ genau einmal:

$$W_2 + W_3 + W_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{4} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \; . \tag{**V**.5.6}$$

Die Fortführung dieses Verfahrens ist nun klar: Um schließlich alle N Ladungen an ihre Positionen zu bringen, benötigt man die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \, \Phi(\vec{r}_i) \; , \end{aligned} \tag{**V**.5.7}$$

wobei $\Phi(\vec{r}_i)$ das von den Ladungen $q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_N$ erzeugte Potential bezeichnet; „Selbstwechselwirkung“ wird hier also explizit ausgeschlossen. Diese Arbeit (**V**.5.7) wird als potentielle Energie vom System gespeichert; sie lässt sich zurückgewinnen, indem man die Ladungen wieder unendlich weit auseinander bringt.
Betrachtet man jedoch eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ anstelle einer „Wolke“ von Punktladungen, so wird dieser Ausdruck (**V**.5.7) zu

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathrm{d}^3 r \, \varrho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \; , \tag{**V**.5.8}$$

wobei das Integrationsvolumen V die gesamte Ladung enthalten soll. Mit der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varrho/\varepsilon_0$ kann man die felderzeugende Ladungsdichte durch das erzeugte Feld ausdrücken und erhält

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\Phi \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E}\,\Phi - \int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\Phi\right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E}\,\Phi + \int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{E}^2\right]\,, \end{aligned} \tag{**V**.5.9}$$

wobei eine partielle Integration mit Gaußschem Satz gemäß der Identität (**IV**.3.17) durchgeführt wurde. Die so gefundene Beziehung gilt für jede Wahl des Volumens V, solange die gesamte Ladung in V enthalten ist. Da nun $\Phi \sim 1/r$ und $|\vec{E}| \sim 1/r^2$, während $|\mathrm{d}\vec{f}|$ nur wie r^2 mit der linearen Ausdehnung r des Volumens anwächst, wird der Anteil des Oberflächenintegrals mit wachsendem V immer kleiner. Integriert man schließlich über den gesamten Raum, so fällt er ganz weg:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V_\infty}\mathrm{d}^3r\,\vec{E}^2\,. \tag{**V**.5.10}$$

Während nun nach dieser Gleichung (**V**.5.10) die Energie einer stationären kontinuierlichen Ladungsverteilung immer positiv ist, kann die Energie (**V**.5.7) eines Systems von Punktladungen auch negativ sein. Der Grund für diesen scheinbaren Widerspruch liegt darin, dass in dem Ausdruck (**V**.5.7) die Punktladungen als gegeben angesehen werden; die Energie, die benötigt wurde, um auch diese einzelnen Punktladungen „zusammenzuballen“, bleibt dabei unberücksichtigt. Man beachte, dass die nach Gleichung (**V**.5.10) berechnete „Selbstenergie“ einer Punktladung divergiert:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\int \mathrm{d}r\,r^2\,\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\left(\frac{q}{r^2}\right)^2 \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \\ &= \infty\,. \end{aligned} \tag{**V**.5.11}$$

Von daher ist zwar der Ausdruck (**V**.5.8) als grundlegend anzusehen, aber für die Berechnung der Energie eines System von Punktladungen muss die Beziehung (**V**.5.7) verwendet werden, um dieses „Selbstenergieproblem“ zu vermeiden.
Während in dem Ausdruck (**V**.5.8) nur über das *ladungs*gefüllte Volumen integriert werden muss, erstreckt sich die Integration in der daraus gewonnenen Beziehung (**V**.5.10) über den gesamten *feld*erfüllten Raum. Obwohl an dieser Stelle die Frage, *wo* die Energie gespeichert wird — in den Ladungen oder im Feld — noch nicht schlüssig beantwortet werden kann, ist es doch sehr naheliegend, das *elektrische Feld als Träger von Energie* aufzufassen; dann ist offenbar die Größe

$$u_{\mathrm{el}}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2(\vec{r}) \tag{**V**.5.12}$$

als *Energiedichte des elektrischen Feldes* anzusehen.
Bevor dieser Ausdruck physikalisch interpretiert wird, soll noch die Feldenergie für eine andere Situation angegeben werden: Wenn sich eine in einer Umgebung des Koordinatenursprungs lokalisierte Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ in einem *äußeren*, d.h. von einer anderen Ladungsverteilung $\varrho_{\text{ext}}(\vec{r}\,')$ erzeugten Potential $\Phi_{\text{ext}}(\vec{r})$ befindet, besitzt sie die Energie

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r \int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\varrho(\vec{r})\varrho_{\text{ext}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ &= \int \mathrm{d}^3r\, \varrho(\vec{r})\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) \end{aligned} \qquad (\mathbf{V}.5.13)$$

ohne den Faktor 1/2, durch den in Gleichungen (**V**.5.7) und (**V**.5.8) die Doppelzählung gleicher Ladungspaare vermieden wird. Da die Dichte $\varrho(\vec{r})$ nur in einer Umgebung des Ursprungs von Null verschieden sein soll, wird $\Phi_{\text{ext}}(\vec{r})$ um $\vec{r}=\vec{0}$ herum entwickelt, wozu wieder die Taylorreihe (**V**.4.3) herangezogen werden kann:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) &= \Phi_{\text{ext}}(\vec{0}) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\Phi_{\text{ext}}(\vec{r})\Big|_{\vec{0}} + \frac{1}{2}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})^2\Phi_{\text{ext}}(\vec{r})\Big|_{\vec{0}} + \dots \\ &= \Phi_{\text{ext}}(\vec{0}) - \vec{r}\cdot\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{0}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j\, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Phi_{\text{ext}}(\vec{r})\Big|_{\vec{0}} + \dots \\ &= \Phi_{\text{ext}}(\vec{0}) - \vec{r}\cdot\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{0}) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\, \frac{\partial E_{i,\text{ext}}}{\partial x_j}\Big|_{\vec{0}} + \dots\ . \end{aligned} \qquad (\mathbf{V}.5.14)$$

Bei der im letzten Term vorgenommenen Ergänzung wurde ausgenuzt, dass das äußere Feld $\vec{E}_{\text{ext}}$ von der sich anderswo befindenden Ladungsdichte $\varrho_{\text{ext}}(\vec{r})$ erzeugt wird und daher im Ursprung divergenzfrei ist:

$$\sum_{i,j=1}^{3}\delta_{ij}\,\frac{\partial E_{i,\text{ext}}}{\partial x_j}\Big|_{\vec{0}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial E_{i,\text{ext}}}{\partial x_i}\Big|_{\vec{0}} = 0\,. \qquad (\mathbf{V}.5.15)$$

Setzt man nun diese Entwicklung in den Ausdruck (**V**.5.13) ein und berücksichtigt die Definitionen (**V**.4.11) und (**V**.4.13) der kartesischen Dipol- und Quadrupolmomente der Verteilung $\varrho(\vec{r})$, so ergibt sich die sehr transparente Darstellung

$$W = q\Phi_{\text{ext}}(\vec{0}) - \vec{p}\cdot\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{0}) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\,\frac{\partial E_{i,\text{ext}}}{\partial x_j}\Big|_{\vec{0}} + \dots\ . \qquad (\mathbf{V}.5.16)$$

Die Gesamtladung „koppelt“ also an das Potential selbst, das Dipolmoment an das äußere Feld, das Quadrupolmoment an die Feldgradienten, usw. Insbesondere ist

$$W_{\text{Dipol}} = -\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (\mathbf{V}.5.17)$$

die Energie eines Dipols $\vec{p}$ in einem elektrischen Feld $\vec{E}$.
Zurück zu dem Ausdruck (**V**.5.12) für die Energiedichte des elektrischen Feldes: Die Dimension der Energiedichte, nämlich Energie pro Volumen, stimmt überein mit der des

Druckes, nämlich Kraft pro Fläche. Von daher mag es plausibel erscheinen, dass dieser Ausdruck (**V**.5.12) auch den „elektrostatischen Druck“ beschreibt, den die Oberfläche eines Leiters in einem elektrischen Feld erfährt. Die physikalische Begründung dieser Tatsache erfordert jedoch einige Sorgfalt, die wesentlich mit dem Faktor „1/2“ zusammenhängt, der die beiden Gleichungen (**V**.5.8) und (**V**.5.13) unterscheidet, also mit der Unterscheidung von Feldern, die von einer gegebenen Ladung selbst erzeugt oder von außen vorgegeben werden. Dazu betrachte man nun eine Fläche mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$. Dann besteht das Feld am Ort eines kleinen Flächenelementes $\mathrm{d}\vec{a}$ aus zwei Anteilen:

(i) Dem „lokalen“ Feld $\vec{E}_{\mathrm{loc}}$, das von den Ladungen auf $\mathrm{d}\vec{a}$ selbst erzeugt wird, und

(ii) dem „äußeren“ Feld $\vec{E}_{\mathrm{ext}}$, das von der Ladung auf allen anderen Flächenelementen und evtl. noch weiteren Ladungen erzeugt wird.

Man hat daher eine Zerlegung

$$\vec{E} = \vec{E}_{\mathrm{loc}} + \vec{E}_{\mathrm{ext}} \; . \tag{\textbf{V}.5.18}$$

Beim Durchtritt durch ein geladenes Flächenelement $\mathrm{d}\vec{a}$ erfährt die Normalkomponente des elektrischen Feldes nach dem Gaußschen Satz eine Unstetigkeit der Größe σ/ε_0. Für diese Unstetigkeit ist nur die Ladung auf $\mathrm{d}\vec{a}$ verantwortlich; sie betrifft daher nur das lokale Feld. Aus Symmetriegründen lauten die Felder auf beiden Seiten der Fläche dann

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} + \vec{E}_{\mathrm{ext}} \\ \vec{E}_2 &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} + \vec{E}_{\mathrm{ext}} \; , \end{aligned} \tag{\textbf{V}.5.19}$$

so dass

$$\vec{E}_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \; . \tag{\textbf{V}.5.20}$$

Die Kraft auf $\mathrm{d}\vec{a}$ kann *nur* durch das externe, nicht durch das lokale Feld hervorgerufen werden. Für die Kraftdichte ergibt sich daher

$$\vec{f} \;=\; \sigma\vec{E}_{\mathrm{ext}} \;=\; \frac{1}{2}\sigma(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \; . \tag{\textbf{V}.5.21}$$

Dieses Argument kann auf jede Flächenladung angewandt werden, also auch auf die Ladung an der Oberfläche eines metallischen Leiters. Da das Innere eines solchen Leiters feldfrei bleibt, hat man für die Felder auf beiden Seiten seiner Oberfläche die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \\ \vec{E}_2 &= \vec{0} \, , \end{aligned} \tag{\textbf{V}.5.22}$$

so dass sich das äußere Feld, das die Kraft auf den Leiter ausübt, um einen Faktor 1/2 von dem Feld an der Leiteroberfläche unterscheidet:

$$\vec{E}_{\mathrm{ext}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \; . \tag{\textbf{V}.5.23}$$

Das ergibt schließlich die gesuchte Kraftdichte

$$\vec{f} \;=\; \sigma \vec{E}_{\text{ext}} \;=\; \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}\,. \tag{**V**.5.24}$$

Der elektrostatische Druck p_{el}, der den Leiter unabhängig vom Vorzeichen von σ in das Feld zieht, besitzt daher die Darstellung

$$p_{\text{el}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}_1^2 \tag{**V**.5.25}$$

und stimmt somit genau mit der Energiedichte (**V**.5.12) an der Leiteroberfläche überein. Abschließend soll noch ein weiterer Begriff erläutert werden, der für die Elektrostatik wichtig ist, nämlich der der Kapazität: Hat man zwei voneinander isolierte Leiter, kann man auf den einen die Ladung $+Q$ und auf den anderen die Ladung $-Q$ aufbringen. Auf beiden Leitern ist das Potential konstant; die Potentialdifferenz ist

$$\Phi_+ - \Phi_- = -\int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}\,, \tag{**V**.5.26}$$

wobei $\vec{r}_\pm$ beliebige Punkte auf den zwei Leitern bezeichnen. Da $\vec{E}$ proportional zu Q ist, gilt das auch für die Potentialdifferenz, d.h. für die „Spannung“ U:

$$\Phi_+ - \Phi_- \;\equiv\; U \;=\; \frac{1}{C}\,Q\,; \tag{**V**.5.27}$$

die Proportionalitätskonstante C heißt *Kapazität* des Leiterpaares. (Je größer die Potentialdifferenz, die benötigt wird, um eine gewisse Ladung Q aufzubringen, desto kleiner die Kapazität: $C = Q/U$.) Die SI-Einheit der Potentialdifferenz, also der Spannung, ist das Volt; die SI-Einheit der Kapazität ist das Farad: 1 Farad = 1 Coulomb pro Volt, oder

$$1\,\mathrm{F} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}\,. \tag{**V**.5.28}$$

Betrachtet man als Beispiel einen Plattenkondensator mit zwei parallelen Platten der Fläche $A = 10\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm}$, die sich am Abstand $d = 1\,\mathrm{mm}$ gegenüberstehen und die Ladungen $\pm Q$ tragen, so herrscht zwischen ihnen ein homogenes Feld der Stärke

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}\,. \tag{**V**.5.29}$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Platten beträgt daher

$$U = \frac{d}{\varepsilon_0 A}Q\,; \tag{**V**.5.30}$$

daraus folgt für die Kapazität

$$C = \varepsilon_0\frac{A}{d}\,. \tag{**V**.5.31}$$

Mit den obigen Zahlenwerten ergibt sich

$$\begin{aligned} C &= 8.854\,188 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \times \frac{10^{-2}\,\mathrm{m}^2}{10^{-3}\,\mathrm{m}} \\ &\approx 8.9 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}} \\ &= 8.9 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F}\ ; \end{aligned}$$

1 F ist also eine *sehr* große Kapazität!
Um einen Kondensator aufzuladen, müssen Ladungen von einem der Leiter entfernt und auf den anderen gebracht werden; dabei ist gegen das Feld der schon vorhandenen Ladungen Arbeit zu leisten. Für den „Antransport“ einer kleinen Ladung dq wird die Arbeit

$$\mathrm{d}W \;=\; \mathrm{d}q\,U \;=\; \mathrm{d}q\,\frac{q}{C} \qquad (\mathbf{V}.5.32)$$

benötigt, wenn der Kondensator bereits die Ladung q trägt; für die Aufladung von $q = 0$ bis $q = Q$ ist daher die Arbeit

$$W \;=\; \int_0^Q \mathrm{d}q\,\frac{q}{C} \;=\; \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \;=\; \frac{1}{2}CU^2 \qquad (\mathbf{V}.5.33)$$

aufzubringen, die dann im Feld des Kondensators gespeichert wird.

V.6 Das magnetische Vektorpotential

Die Maxwell-Gleichungen (**V**.1.2) und (**V**.1.4) reduzieren sich im statischen Fall, in dem kein Verschiebungsstrom auftritt, auf das System

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \;=\; 0 \qquad (\mathbf{V}.6.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \;=\; \mu_0 \vec{j}(\vec{r})\ ; \qquad (\mathbf{V}.6.2)$$

die Kontinuitätsgleichung (**V**.1.15) erhält die Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0\ . \qquad (\mathbf{V}.6.3)$$

Diese drei Gleichungen bestimmen die Magnetostatik, also das Verhalten zeitunabhängiger Magnetfelder.
Ebenso wie schon in der Elektrostatik eine der dort auftretenden Bestimmungsgleichungen für das elektrische Feld (nämlich $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$) schon durch die Einführung eines Potentials identisch erfüllt werden kann (für $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ gilt „automatisch“ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$, da Gradientenfelder wirbelfrei sind), kann auch in der Magnetostatik die homogene Gleichung (**V**.6.1) schon „per Ansatz“ gelöst werden: Schreibt man die magnetische Induktion als

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \qquad (\mathbf{V}.6.4)$$

mit einem *Vektorpotential* $\vec{A}(\vec{r})$, so folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \;=\; \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \;=\; 0\ , \qquad (\mathbf{V}.6.5)$$

da Wirbelfelder quellenfrei sind.
Allerdings ist dieses Vektorpotential durch die Forderung (**V**.6.4) *nicht eindeutig* bestimmt: Man kann zu dem Feld $\vec{A}(\vec{r})$ noch ein beliebiges Gradientenfeld addieren, ohne seine Wirbel zu verändern. Schreibt man also

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) \tag{**V**.6.6}$$

mit einer beliebigen *Eichfunktion* $\chi(\vec{r})$, so gilt auch

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A}'(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \vec{B}(\vec{r}) \; . \end{aligned} \tag{**V**.6.7}$$

Diese *Eichfreiheit* ist von sehr großer Bedeutung: Man kann sie nutzen, um das Vektorpotential „bedarfsgerecht“ zu wählen, so dass z.B. die damit durchgeführten Rechnungen besonders einfach werden, ohne dass die wirklich beobachtbare Feldgröße, also die magnetische Induktion, dadurch beinflusst wird.
Die inhomogene Gleichung (**V**.6.2) erhält durch die Einführung des Vektorpotentials die Gestalt

$$\begin{aligned} \mu_0\vec{j}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - \Delta\vec{A}(\vec{r}) \; . \end{aligned} \tag{**V**.6.8}$$

Eicht man das Vektorpotential nun derart, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ — diese Eichung wird als *Coulomb-Eichung* bezeichnet —, so bleibt lediglich

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r}) \; . \tag{**V**.6.9}$$

Das ist nichts anderes als ein System von drei entkoppelten Poisson-Gleichungen. Man kann somit alle Resultate über die Lösung dieser Gleichung aus der Elektrostatik übernehmen: Für den archetypischen Fall einer lokalisierten Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}\,')$ ohne materielle Randbedingungen erhält man also das Vektorpotential komponentenweise durch Faltung der Inhomogenität mit der Greenschen Funktion (**V**.2.23) für den unendlichen Raum:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \; . \tag{**V**.6.10}$$

Mit Hilfe der Produktregel

$$\vec{\nabla} \times (\varphi\vec{v}) = \varphi\vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla}\varphi \times \vec{v} \tag{**V**.6.11}$$

für ein Skalarfeld φ und ein Vektorfeld $\vec{v}$ folgt daraus sofort

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \, \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \times \vec{j}(\vec{r}\,') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} . \end{aligned} \tag{**V**.6.12}$$

Anders als das Vektorpotential (**V**.6.10) ist diese Darstellung der magnetischen Induktion von der Eichung völlig unabhängig.
In vielen wichtigen Fällen wird die Stromverteilung durch dünne Kabel vorgegeben und ist damit quasi-eindimensional, sofern die Querschnitte der Leiter vernachlässigbar sind. Bezeichnet dann I die konstante Stärke des Stroms durch das Kabel, so gilt für einen solchen „Stromfaden“ die Beziehung

$$\vec{j}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3r' = I\,\mathrm{d}\vec{r}\,' \,, \tag{**V**.6.13}$$

wobei $\mathrm{d}\vec{r}\,'$ ein lokaler Tangentialvektor an die Leiterkurve ist. Damit erhält die von einem konstanten Strom durch einen quasi-eindimensionalen Leiter erzeugte Induktion die Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\text{Leiter}} \mathrm{d}\vec{r}\,' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}. \tag{**V**.6.14}$$

Das ist das bekannte Gesetz von Biot[13] und Savart[14], mit dessen Hilfe die magnetische Induktion für beliebige Drahtkonfigurationen berechnet werden kann. Die SI-Einheit der magnetischen Induktion ist das Tesla (T):

$$1\,\mathrm{T} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\,. \tag{**V**.6.15}$$

■ **Beispiel:** Die magnetische Induktion eines langgestreckten Drahtes.

Wie lautet die magnetische Induktion, die durch einen unendlich langen Draht mit vernachlässigbarem Querschnitt erzeugt wird, wenn dieser von einem konstanten Strom I durchflossen wird?
Legt man das Koordinatensystem so, dass seine z-Achse mit dem Draht übereinstimmt, werden die „Quellpunkte“ auf dem Stromfaden parametrisiert durch

$$\vec{r}\,' = z'\vec{e}_z\,.$$

Bezeichnet man weiterhin die zylindrische Radialkoordinate mit ϱ, so wird die Differenz zwischen Beobachtungs- und Quellpunkt gegeben durch

$$\vec{r}-\vec{r}\,' \;=\; \varrho\vec{e}_\varrho + (z-z')\vec{e}_z\,,$$

[13] *Nach Wikipedia:* Jean-Baptiste Biot (geb. am 21. April 1774 in Paris; gest. am 3. Februar 1862 in Paris) war ein französischer Physiker und Mathematiker. Im frühen 19. Jahrhundert erforschte er den Zusammenhang von elektrischem Strom und Magnetismus sowie die Drehung polarisierten Lichtes beim Durchgang durch optisch aktive Lösungen (optische Aktivität). Am 24. August 1804 unternahm er zusammen mit Joseph Louis Gay-Lussac eine Fahrt mit einem Wasserstoffballon und erreichte dabei eine Höhe von 4.000 m. Bei dieser Gelegenheit untersuchten beide die Inklination des Erdmagnetfeldes.

[14] *Nach Wikipedia:* Félix Savart (geb. am 30. Juni 1791 in Charleville-Mézières, Ardennes; gest. am 16. März 1841 in Paris) war ein französischer Arzt und Physiker, der gemeinsam mit Jean-Baptiste Biot den Zusammenhang von elektrischem Strom und Magnetismus untersuchte. Weiterhin untersuchte Savart die Eigenschaften von schwingenden Saiten, so dass die Maßeinheit Savart nach ihm benannt wurde. Er baute eine trapezförmige Violine, deren klangliche Eigenschaften aber nicht überzeugen konnten (das Original befindet sich im Museum der École Polytechnique in Paris; ein verbesserter Nachbau von 1909 befindet sich im Deutschen Museum München).

Abbildung **V**.8: Die magnetische Induktion eines unendlich langen geraden stromdurchflossenen Drahtes kann mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes (**V**.6.14) berechnet werden, indem man über alle Orte auf dem Draht integriert. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die reduzierte Maxwell-Gleichung (**V**.6.2) mit Hilfe des Stokesschen Satzes über eine Kreisfläche zu integrieren, die in ihrer Mitte vom Draht senkrecht durchstoßen wird.

wie in Abbildung **V**.8 veranschaulicht. Da dann

$$\mathrm{d}\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,') \;=\; \mathrm{d}z'\varrho\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\varrho \;=\; \mathrm{d}z'\varrho\,\vec{e}_\varphi \;,$$

erhält das Biot-Savart-Gesetz (**V**.6.14) nun die Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z' \, \frac{\varrho\vec{e}_\varphi}{\left(\varrho^2 + (z-z')^2\right)^{3/2}} \;.$$

Das hier auftretende Integral ergibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z'}{\left(\varrho^2 + z'^2\right)^{3/2}} \;=\; \left.\frac{z'}{\varrho^2\left(\varrho^2 + z'^2\right)^{1/2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} \;=\; \frac{2}{\varrho^2} \;,$$

so dass

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\varrho}\,\vec{e}_\varphi \;.$$

Dieses Ergebnis lässt sich sehr viel einfacher erhalten, wenn man bereits weiß, dass die magnetische Induktion den Draht azimutal umschließt. Integriert man dann die Gleichung (**V**.6.2) über die Fläche eines Kreises vom Radius ϱ, der in seiner Mitte senkrecht vom Draht durchstoßen wird, so liefert der Stokessche Satz die Beziehung

$$B(\varrho) \cdot 2\pi\varrho = \mu_0 I \;,$$

woraus man mit $\vec{B}(\vec{r}) = B(\varrho)\vec{e}_\varphi$ sofort wieder das obige Resultat gewinnt. ■

Auch für das Vektorpotential (**V**.6.10) lässt sich eine Multipol-Entwicklung durchführen. Beschränkt man sich an dieser Stelle auf die führenden beiden Terme der kartesischen Entwicklung (**V**.4.8), also auf

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}}{r^3} + \dots \;, \tag{**V**.6.16}$$

so erhält man für das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung die Reihe

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\;\vec{j}(\vec{r}\,') + \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r^3}\int \mathrm{d}^3r'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}(\vec{r}\,') + \dots \;. \tag{**V**.6.17}$$

Um nun diese Entwicklung in eine gut interpretierbare Form zu bringen, sind einige Hilfsüberlegungen erforderlich. Betrachtet man dazu zwei zunächst beliebige Skalarfelder φ und ψ, so gilt die Identität

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot(\varphi\psi\vec{j}) &= \varphi\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \vec{j}\cdot\vec{\nabla}(\varphi\psi) \\ &= \varphi\vec{j}\cdot\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{j}\cdot\vec{\nabla}\varphi \;, \end{aligned} \tag{**V**.6.18}$$

da die Stromdichte $\vec{j}$ der statischen Kontinuitätsgleichung (**V**.6.3) gehorcht, $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$. Integration über ein sehr großes Volumen V, auf dessen Rand keine Ströme mehr vorhanden sind, liefert andererseits

$$\int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{\nabla}\cdot(\varphi\psi\vec{j}) \;=\; \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{f}\cdot(\varphi\psi\vec{j}) \;=\; 0\;. \tag{**V**.6.19}$$

Damit hat man die Gleichung

$$0 = \int \mathrm{d}^3r\,\left(\varphi\vec{j}\cdot\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{j}\cdot\vec{\nabla}\varphi\right)\;. \tag{**V**.6.20}$$

Setzt man darin $\varphi = 1$ und identifiziert $\psi = x_k$ mit einer der drei Komponenten von $\vec{r}$, so erhält man daraus

$$0 = \int \mathrm{d}^3r\,j_k \qquad ; \qquad k=1,2,3\;. \tag{**V**.6.21}$$

Damit verschwindet der Monopolbeitrag der Entwicklung (**V**.6.17) von $\vec{A}(\vec{r})$, in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass es keine magnetischen Ladungen gibt.
Setzt man andererseits $\varphi = x_i$ und $\psi = x_k$, so liefert Gleichung (**V**.6.20) die weitere Beziehung

$$0 = \int \mathrm{d}^3r\,\left(x_ij_k + x_kj_i\right)\;, \tag{**V**.6.22}$$

also

$$\int \mathrm{d}^3r\,x_kj_i \;=\; -\int \mathrm{d}^3r\,x_ij_k\;. \tag{**V**.6.23}$$

Mit einem beliebigen Vektor $\vec{a}$ erhält man daraus

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3r'\,(\vec{a}\cdot\vec{r}')\,j_i(\vec{r}') &= \sum_{k=1}^{3} a_k \int \mathrm{d}^3r'\,x'_k j_i(\vec{r}') \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} a_k \int \mathrm{d}^3r'\,\left(x'_i j_k - x'_k j_i\right) \\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\,\Big(x'_i(\vec{a}\cdot\vec{j}) - j_i(\vec{a}\cdot\vec{r}')\Big) \qquad (\mathbf{V}.6.24)\end{aligned}$$

oder

$$\int \mathrm{d}^3r'\,(\vec{a}\cdot\vec{r}')\,\vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2}\vec{a}\times\int \mathrm{d}^3r'\,\left(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')\right)\,, \qquad (\mathbf{V}.6.25)$$

wobei die „BAC-CAB-Regel“

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

verwendet wurde. Mit $\vec{a} = \vec{r}/r^3$ erhält dann die Entwicklung (**V**.6.17) des Vektorpotentials die neue Gestalt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}\times\int \mathrm{d}^3r'\,\left(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')\right) + \dots\,. \qquad (\mathbf{V}.6.26)$$

Definiert man nun das magnetische (Dipol-)Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\;\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})\,, \qquad (\mathbf{V}.6.27)$$

so erhält das Vektorpotential schließlich seine endgültige Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} + \dots\,. \qquad (\mathbf{V}.6.28)$$

Wenn die Stromverteilung insbesondere durch eine ebene Leiterschleife C gegeben wird, die eine Fläche F mit Normalenvektor $\vec{n}$ umschließt, so findet man in der „Stromfaden“-Näherung (**V**.6.13) für das magnetische Moment (**V**.6.27) den Ausdruck

$$\vec{m} \;=\; \frac{I}{2}\oint_C \vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r} \;=\; IF\,\vec{n}\,; \qquad (\mathbf{V}.6.29)$$

eine solche Stromschleife bildet daher eine besonders einfache Realisierung eines magnetischen Dipols.
Es bleibt noch die magnetische Induktion zu berechnen, die zu einem solchen Dipol gehört. Mit Hilfe der beiden Produktregeln

$$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{v}) = \varphi\vec{\nabla}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{\nabla}\varphi \qquad (\mathbf{V}.6.30)$$

und

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{w} - \vec{w}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \qquad (\mathbf{V}.6.31)$$

sowie der etwas mühevollen Umformungen

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3}\vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \vec{r}) - (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3}\big(-(\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} + \vec{m}\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\big) - (\vec{m} \times \vec{r}) \times \frac{-3\vec{r}}{r^5}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{1}{r^3}(\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} + \frac{3\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5}(\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{m}}{r^3} - \frac{3}{r^5}\big(\vec{m}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{m})\big)\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{m})}{r^5}\right] \qquad (\mathbf{V}.6.32)
\end{aligned}$$

ergibt sich schließlich für $\vec{r} \neq \vec{0}$ das typische Fernfeld eines Dipols:

$$\vec{B}_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{m})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right] . \qquad (\mathbf{V}.6.33)$$

Es soll an dieser Stelle noch einmal betont werden, dass hier zwar für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ die bequeme Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ vorausgesetzt wurde, dass aber die damit berechnete Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ vollkommen eichunabhängig ist.

V.7 Die Energie des Magnetfeldes

Betrachtet wird nun eine geschlossene Schleife eines quasi-eindimensionalen Leiters, deren Verlauf durch eine Kurve C_1 beschrieben wird und die von einem konstanten Strom der Stärke I_1 durchflossen wird. Nach dem Biot-Savart-Gesetz (**V**.6.14) erzeugt diese Stromschleife die magnetische Induktion

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{C_1} \mathrm{d}\vec{r}\,' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} , \qquad (\mathbf{V}.7.1)$$

die für jede Leiterkurve C_1 streng proportional zum Strom I_1 ist. Das gilt dann auch für den Fluss dieser Induktion $\vec{B}_1$ durch eine *zweite* Leiterschleife, deren Verlauf durch eine Kurve C_2 gegeben wird und die eine Fläche F_2 umschließt:

$$\Phi_2 \;=\; \int_{F_2} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{B}_1(\vec{r}) \;=\; L_{21} I_1 \; ; \qquad (\mathbf{V}.7.2)$$

die hier auftretende Proportionalitätskonstante L_{21} wird als *Gegeninduktivität* bezeichnet. Diese Gegeninduktivität kann leicht in konkreter Form angegeben werden: Einerseits besagt der Stokessche Satz nun

$$\Phi_2 \;=\; \int_{F_2} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = \int_{C_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}_1 \; , \qquad (\mathbf{V}.7.3)$$

andererseits hat man mit den Gleichungen (**V**.6.10) und (**V**.6.13) in der Coulomb-Eichung die Darstellung

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; . \tag{\textbf{V}.7.4}$$

Damit findet man nun sofort

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{C_1}\int_{C_2} \frac{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; , \tag{\textbf{V}.7.5}$$

so dass die Gegeninduktivität ausschließlich von den Verläufen der beiden Leiterschleifen bestimmt wird:

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1}\int_{C_2} \frac{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; . \tag{\textbf{V}.7.6}$$

Sie ist offenbar symmetrisch unter einer Vertauschung der beiden Schleifen. Daher ist der Fluss durch Schleife 2, der sich als Folge eines Stromes I durch Schleife 1 ergibt, genauso groß wie der Fluss durch Schleife 1, der sich einstellt, wenn der gleiche Strom I durch Schleife 2 fließt.
Der Strom I_1 durch Schleife 1 soll nun so langsam verändert werden, dass die Anordnung als *quasi-stationär* angesehen werden kann. Damit ist gemeint, dass der Maxwellsche Verschiebungsstrom trotz der Stromänderung vernachlässigbar bleiben soll, so dass auch die sich nun langsam verändernden Magnetfelder noch durch die Grundgleichungen (**V**.6.1), (**V**.6.2) und (**V**.6.3) der Magnetostatik beschrieben werden.[15] Als Folge dieser Stromänderung in Schleife 1 ändert sich der magnetische Fluss durch die von der Schleife 2 umschlossenen Fläche, so dass nach dem Faradayschen Induktionsgesetz (**V**.1.21) entlang dieser Schleife ein elektrisches Wirbelfeld induziert wird, das seinerseits einen Strom in Schleife 2 antreibt:

$$\oint_{C_2} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} \;=\; -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} \;=\; -L_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \; . \tag{\textbf{V}.7.7}$$

Entscheidend ist nun, dass ein solcher Effekt auch in der Schleife 1 selbst auftritt, denn auch der Fluss durch Schleife 1 ist proportional zum Strom durch diese Schleife. Man hat somit eine Beziehung $\Phi_1 = L_{11}I_1$, oder, ohne die nun überflüssigen Indizes,

$$\Phi = LI \; , \tag{\textbf{V}.7.8}$$

wobei die Proportionalitätskonstante L als *Selbstinduktivität* bezeichnet wird. Bei quasistationärer Änderung des Stromes ergibt sich daher ein elektrisches Feld längs der Leiterschleife, das nun der Beziehung

$$\oint_{C} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{\textbf{V}.7.9}$$

[15] Das ist dann der Fall, wenn sich die Ladungsverteilungen in der Zeit, die das Licht zur Durchquerung der Apparatur braucht, praktisch nicht verändern.

Abbildung **V**.9: Zur Energie eines magnetischen Feldes: Wird in der Leiterschleife C ein Strom in Gang gesetzt, so baut sich um den Leiter eine zirkulare Induktion auf. Das entspricht einem Anwachsen des magnetischen Flusses durch die von der Schleife umschlossene Fläche, so dass längs dieser Schleife ein elektrisches Wirbelfeld induziert wird. Damit der Strom einen konstanten Endwert erreichen kann, muss Arbeit verrichtet werden, um die Ladungen im Leiter gegen dieses Wirbelfeld zu führen; diese Arbeit wird in dem sich aufbauenden Magnetfeld gespeichert.

gehorchen muss. Die Bedeutung des Vorzeichens wird aus der Abbildung **V**.9 ersichtlich: Das durch die Stromänderung induzierte elektrische Feld ist so gerichtet, dass es im Sinne der Lenzschen Regel der Stromänderung *entgegenwirkt*. Die Selbstinduktivität (kurz: Induktivität) beschreibt daher eine Art von „Trägheit“ des Stroms in einer Leiterschleife. Die SI-Einheit der Induktivität ist das Henry (H):

$$1\,\mathrm{H} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{Tm}^2}{\mathrm{A}} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}\;. \qquad (\mathbf{V}.7.10)$$

■ **Beispiel:** Die Selbstinduktivität einer Spule.

Für eine ideale Spule mit einem kreisförmigem Querschnitt vom Radius R, einer Länge l und N Windungen liefert der Stokessche Satz bei Vernachlässigung von Randeffekten für die Induktion B im Spuleninneren den Zusammenhang

$$Bl = \mu_0 N I\;.$$

Der Fluss dieser Induktion durch eine einzige Spulenwindung beträgt daher

$$B\pi R^2 = \mu_0 \pi R^2 \frac{N}{l} I\;;$$

der Fluss durch alle N Windungen ergibt sich somit zu

$$\Phi = \mu_0 \pi R^2 \frac{N^2}{l} I\;.$$

Daraus lässt sich die Induktivität sofort ablesen:

$$L = \mu_0 \pi R^2 \frac{N^2}{l}$$

Die Induktivität einer solchen Spule wächst daher sogar *quadratisch* mit ihrer Windungszahl. ■

Da das durch die Induktivität einer Leiterschleife aufgebaute elektrische Wirbelfeld dem Aufbau eines Stromes in der Schleife entgegenwirkt, muss Arbeit aufgewandt werden, um den Strom in Gang zu setzen. Diese Arbeit wird in dem von dem Strom erzeugten Magnetfeld gespeichert; sie wird wieder frei, wenn der Strom unterbrochen wird. Um nun eine kleine Ladung $\mathrm{d}q$ gegen das Wirbelfeld um die Schleife herumzuführen, benötigt man die Arbeit

$$\mathrm{d}W = -\int_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E} \mathrm{d}q \; ; \tag{**V**.7.11}$$

fließt dabei ein momentaner Strom $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, so ergibt sich nach Gleichung (**V**.7.9) die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = LI \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \; . \tag{**V**.7.12}$$

Wenn daher in einem Stromkreis mit einer Induktivität L der Strom von Null auf die Stärke I „hochgefahren“ wird, wird die Energie

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \tag{**V**.7.13}$$

in dem vom Strom erzeugten Magnetfeld gespeichert. Es ist nun interessant, diesen Ausdruck in eine „grundsätzlichere“ Form zu bringen: Einserseits gilt die Gleichung (**V**.7.8), also

$$\Phi = LI \; ,$$

andererseits hat man

$$\Phi \; = \; \int_F \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{B} \; = \; \int_F \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \; = \; \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A} \, , \tag{**V**.7.14}$$

so dass

$$LI = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A} \, . \tag{**V**.7.15}$$

Damit erhält man für die Energie (**V**.7.13) des Magnetfeldes nun den Ausdruck

$$W \; = \; \frac{1}{2} I \int \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A} \; = \; \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \; \vec{j} \cdot \vec{A} \, , \tag{**V**.7.16}$$

wobei im letzen Schritt noch die „Stromfaden“-Näherung (**V**.6.13) rückgängig gemacht wurde; die rechte Seite dieser neuen Gleichung (**V**.7.16) bildet offenbar das magnetische Gegenstück zu dem Ausdruck (**V**.5.8) für die in einem elektrischen Feld gespeicherte Energie. Dementsprechend laufen die nun folgenden Schritte genau denjenigen parallel, die in Abschnitt **V**.5 zur Identifizierung der elektrischen Energiedichte (**V**.5.12) geführt haben: Nutzt man die reduzierte Maxwell-Gleichung $\mu_0\vec{j} = \vec{\nabla}\times\vec{B}$, um die felderzeugende Stromdichte $\vec{j}$ durch das erzeugte Feld $\vec{B}$ auszudrücken, so ergibt sich

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}\,, \tag{V.7.17}$$

wobei das Integrationsvolumen V die gesamte Stromverteilung enthalten soll. Nun gilt die Produktregel

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} \tag{V.7.18}$$

oder

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{B}^2 - \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\,, \tag{V.7.19}$$

so dass

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{B}^2 - \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{A}\times\vec{B}\right]\,. \tag{V.7.20}$$

Integriert man schließlich über den gesamten Raum, so verschwindet der Beitrag des Oberflächenintegrals. Daher ist offenbar

$$u_{\mathrm{mag}}(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(\vec{r}) \tag{V.7.21}$$

die Dichte der in dem magnetischen Feld gespeicherten Energie und bildet somit das magnetische Gegenstück zu der elektrischen Energiedichte (**V**.5.12).
Geht man nun davon aus, dass die in einem elektromagnetischen Feld insgesamt gespeicherte Energie die Summe aus elektrischer und magnetischer Feldenergie ist, so ergibt sich für die *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes* eine einfache quadratische Form:

$$\boxed{u_{\mathrm{em}}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2(\vec{r}) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(\vec{r})} \tag{V.7.22}$$

Diese Beziehung, die keineswegs nur zufällig an die ebenfalls quadratische Energiefunktion (**III**.3.9) des harmonischen Oszillators erinnert, spielt für das tiefere Verständnis des elektromagnetischen Feldes eine große Rolle — allerdings nicht mehr in dieser ersten Einführung, deren Ende nun erreicht ist.

VI Appendix: Die Kugelflächenfunktionen

Die Separation der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ in sphärischen Polarkoordinaten wurde in Abschnitt **V**.3 nur für den Fall durchgeführt, dass das Potential Φ vom Azimutalwinkel φ unabhängig ist, also Azimutalsymmetrie besitzt. In diesem Anhang soll nun die Separation in voller Allgemeinheit vorgenommen werden.

VI.1 Vollständige Separation der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Gesucht wird die allgemeine Form der Lösung einer Laplace-Gleichung in sphärischen Polarkoordinaten r, ϑ, φ, also

$$\Delta\Phi(r,\vartheta,\varphi) = 0 \; . \tag{VI.1.1}$$

Gemäß der Gleichung (**V**.3.14) besitzt der Laplace-Operator in diesen Kugelkoordinaten die Gestalt

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\Lambda^2}{r^2} \; , \tag{VI.1.2}$$

wobei der Operator Λ^2 nur auf die Winkel ϑ und φ wirkt:

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \; . \tag{VI.1.3}$$

Macht man daher den ersten Separationsansatz

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)Y(\vartheta,\varphi) \; , \tag{VI.1.4}$$

so erhält die Laplace-Gleichung in Verallgemeinerung der vorherigen Gleichung (**V**.3.18) die Form

$$\frac{r^2}{rR(r)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} rR(r) = -\frac{1}{Y(\vartheta,\varphi)}\,\Lambda^2 Y(\vartheta,\varphi) \; . \tag{VI.1.5}$$

Die noch unbekannte Separationskonstante wird nun mit dem Symbol α bezeichnet. Der Winkelteil der Laplace-Gleichung (**VI**.1.1) führt damit auf die *Eigenwertgleichung*

$$-\Lambda^2 Y(\vartheta,\varphi) = \alpha Y(\vartheta,\varphi) \tag{VI.1.6}$$

für die gesuchten Funktionen $Y(\vartheta,\varphi)$. Dabei sind an diese Eigenfunktionen die folgenden *Randbedingungen* zu stellen:

- Die Eigenfunktionen $Y(\vartheta,\varphi)$ des Operators $-\Lambda^2$ sollen auf der Oberfläche der Einheitskugel (d.h. für $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$) definiert, stetig und *eindeutig* sein.
- Die Eigenfunktionen sollen im Sinne der Überlegungen des Abschnitts **V**.3 *quadratintegrabel* sein, so dass ihre Normierung vorausgesetzt werden darf:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\;|Y(\vartheta,\varphi)|^2 = 1 \; . \tag{VI.1.7}$$

Setzt man nun den weiteren Produktansatz

$$Y(\vartheta,\varphi) = F(\vartheta)G(\varphi) \tag{VI.1.8}$$

in die Eigenwertgleichung (**VI**.1.6) ein, ergibt sich sofort

$$-G(\varphi)\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}F(\vartheta) - F(\vartheta)\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}G(\varphi) = \alpha F(\vartheta)G(\varphi)\ ; \qquad (\mathbf{VI}.1.9)$$

Trennung der Variablen nach bekanntem Muster liefert dann

$$\frac{-\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}G(\varphi)}{G(\varphi)} = \frac{\left[\sin\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta} + \alpha\sin^2\vartheta\right]F(\vartheta)}{F(\vartheta)}\ . \qquad (\mathbf{VI}.1.10)$$

Bezeichnet man die hier auftretende zweite Separationskonstante mit dem Symbol λ, so folgen daraus die beiden weiteren Eigenwertgleichungen

$$\left[\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} + \alpha\sin^2\vartheta\right]F(\vartheta) = \lambda F(\vartheta) \qquad (\mathbf{VI}.1.11)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}G(\varphi) = -\lambda G(\varphi)\ . \qquad (\mathbf{VI}.1.12)$$

Die zweite dieser Gleichungen besitzt reelle oder komplexe Exponentialfunktionen als Lösung, abhängig vom Vorzeichen der Separationskonstanden, d.h. des Eigenwertes λ. An dieser Stelle kann bereits eine der Randbedingungen implementiert werden: Wegen der geforderten Eindeutigkeit der Funktionen $Y(\vartheta,\varphi)$ auf der Einheitskugel muss die Funktion $G(\varphi)$ 2π-periodisch in φ sein. Das erfordert zunächst $\lambda \geq 0$, um periodische Funktionen zu erhalten, nämlich

$$G(\varphi) = N_G \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\varphi} \qquad (\mathbf{VI}.1.13)$$

mit einer Normierungskonstanten N_G. Die entscheidende Eindeutigkeits- und Stetigkeitsbedingung $G(0) = G(2\pi)$ lässt dann für $\sqrt{\lambda}$ nur noch diskrete Werte zu, nämlich ganze Zahlen m:

$$\sqrt{\lambda} \equiv m = 0, \pm1, \pm2, \dots\ , \qquad (\mathbf{VI}.1.14)$$

so dass nun

$$G(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\ . \qquad (\mathbf{VI}.1.15)$$

Hierbei wurde die Normierungskonstante N_G so gewählt, dass die Funktion $G(\varphi)$ bereits für sich im Sinne der Norm für quadratintegrable Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ "auf Eins" normiert ist:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,|G(\varphi)|^2 = 1\ . \qquad (\mathbf{VI}.1.16)$$

Mit $\lambda = m^2$ erhält nun die Gleichung (**VI**.1.11) für die Funktionen $F(\vartheta)$ die Form

$$\left[\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right)^2 + \alpha\sin^2\vartheta - m^2\right]F(\vartheta) = 0\ , \qquad (\mathbf{VI}.1.17)$$

wobei die Eigenwerte α noch zu bestimmen sind. Substituiert man hier $x = \cos\vartheta$, so dass das Intervall $0 \le \vartheta \le \pi$ in das Intervall $1 \ge x \ge -1$ überführt wird, so hat man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} = -\sin\vartheta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{**VI**.1.18}$$

und

$$\sin\vartheta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} = -(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ ; \tag{**VI**.1.19}$$

die durch $F(\vartheta) = f(\cos\vartheta)$ definierte Funktion f gehorcht daher der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \left(\alpha - \frac{m^2}{1-x^2}\right) f(x) = 0\ . \tag{**VI**.1.20}$$

Zur effizienten Lösung dieser Gleichung sind einige weitere Überlegungen erforderlich. Da sie nur das Quadrat m^2 der „Quantenzahl“ m enthält, darf dabei im Folgenden $m \ge 0$ vorausgesetzt werden.
Für $m \neq 0$ wird die Gleichung (**VI**.1.20) für $x \to \pm 1$ singulär. Daher erwartet man z.B. nahe $x = -1$ (also am „Südpol“, d.h. für $\vartheta \approx \pi$) ein Verhalten der Form

$$f(x) \sim (1+x)^\kappa \quad \text{für} \quad x \to -1 \tag{**VI**.1.21}$$

mit einem Exponenten κ, der sich sofort bestimmen lässt: Man hat

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \ \sim\ \kappa(1+x)^{\kappa-1} \tag{**VI**.1.22}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \ &\sim\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\kappa(1+x)^{\kappa-1} \\ &=\ -2x\kappa(1+x)^{\kappa-1} + (1-x^2)\kappa(\kappa-1)(1+x)^{\kappa-2} \quad ; \end{aligned} \tag{**VI**.1.23}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (**VI**.1.20) und Vernachlässigung des nicht singulären Termes proportional zu α ergibt dann die Beziehung

$$(1+x)^{\kappa-1}\left[-2x\kappa + \kappa(\kappa-1)(1-x) - \frac{m^2}{1-x}\right] = 0\ . \tag{**VI**.1.24}$$

Damit hier der Klammerinhalt für $x \to -1$ verschwindet, benötigt man

$$\left[2\kappa + 2\kappa(\kappa-1) - \frac{m^2}{2}\right] = 0\ , \tag{**VI**.1.25}$$

also

$$\kappa^2 = \frac{m^2}{4} \quad \text{oder} \quad \kappa = \pm\frac{m}{2}\ . \tag{**VI**.1.26}$$

Man erhält somit zwei Fundamentallösungen der Gleichung (**VI**.1.20), deren Verhalten nahe $x = -1$ durch

$$f(x) \sim (1+x)^{\pm m/2} \quad \text{für} \quad x \to -1 \tag{**VI**.1.27}$$

beschrieben wird. Der negative Exponent $-m/2$ führt jedoch für $m \neq 0$ auf nicht-normierbare Funktionen, ist also aufgrund der Forderung nach Quadratintegrabilität nicht zulässig. Ein analoges Argument für den „Nordpol“ liefert dann auf die gleiche Weise

$$f(x) \sim (1-x)^{m/2} \quad \text{für} \quad x \to +1\,, \tag{**VI**.1.28}$$

so dass man schließlich auf den Ansatz

$$f(x) = (1-x^2)^{m/2} g_m(x) \tag{**VI**.1.29}$$

für die Lösungen der Gleichung (**VI**.1.20) geführt wird. Daraus erschließt man im nächsten Schritt eine neue, nichtsinguläre Differentialgleichung für die hier eingeführten Funktionen $g_m(x)$: Nach Berechnung der ersten Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -mx(1-x^2)^{m/2-1} g_m + (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} \tag{**VI**.1.30}$$

erhält man

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -mx(1-x^2)^{m/2} g_m + (1-x^2)^{m/2+1} \frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} \tag{**VI**.1.31}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \;=\; & -m(1-x^2)^{m/2} g_m + (mx)^2 (1-x^2)^{m/2-1} g_m \\ & -mx(1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} + (m/2+1)(-2x)(1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} \\ & +(1-x^2)^{m/2+1} \frac{\mathrm{d}^2 g_m}{\mathrm{d}x^2}\;; \end{aligned} \tag{**VI**.1.32}$$

durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung (**VI**.1.20) und Ausklammern des Faktors $(1-x^2)^{m/2}$ ergibt sich daraus

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 g_m}{\mathrm{d}x^2} + (-mx - mx - 2x)\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} + \left(-m + \frac{m^2 x^2}{1-x^2} + \alpha - \frac{m^2}{1-x^2}\right) g_m = 0$$

oder schließlich

$$\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2(m+1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha - m(m+1)\right] g_m = 0\,. \tag{**VI**.1.33}$$

Diese Gleichung (**VI**.1.33) für die Funktionen g_m wird als *verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung* bezeichnet. Sie besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft: Differentiation der Gleichung liefert

$$\left[-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2(m+1) - 2(m+1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha - m(m+1)\right] \frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} = 0$$

oder, nach geeigneter Zusammenfassung der verschiedenen Terme,

$$\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2(m+2)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha - (m+1)(m+2)\right]\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} = 0\ . \qquad (\mathbf{VI}.1.34)$$

Damit erfüllt die Ableitung $\mathrm{d}g_m/\mathrm{d}x$ ebenfalls eine Gleichung des Typs (**VI**.1.33), allerdings mit einem um Eins erhöhten Index $m+1$. Daraus folgt, dass die Funktion g_m durch m-fache Differentiation aus g_0 hervorgeht:

$$g_m(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m g_0(x)\ . \qquad (\mathbf{VI}.1.35)$$

Somit bleibt nun zur Bestimmung der Funktionen $g_m(x)$ nur noch der Fall $m = 0$ zu behandeln. Dafür reduziert sich die verallgemeinerte Legendresche Gleichung (**VI**.1.33) auf

$$\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha\right] g_0(x) = 0\ , \qquad (\mathbf{VI}.1.36)$$

also genau auf die bereits aus Gleichung (**V**.3.30) bekannte Legendresche Differentialgleichung, wobei nun allerdings die möglichen Werte der Separationskonstanten α, also die Eigenwerte der Gleichung (**VI**.1.6), noch zu bestimmen sind.
Zur Lösung dieser Legendre-Gleichung (**VI**.1.36) macht man nun den *Potenzreihenansatz*

$$g_0(x) \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu\ , \qquad (\mathbf{VI}.1.37)$$

so dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g_0(x) \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu x^{\nu-1} \qquad (\mathbf{VI}.1.38)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g_0(x) \;&=\; \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1)c_\nu x^{\nu-2} \\ &=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2)c_{\nu+2}x^\nu\ ; \end{aligned} \qquad (\mathbf{VI}.1.39)$$

Einsetzen in die Gleichung (**VI**.1.36) ergibt dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \Big[(\nu+1)(\nu+2)c_{\nu+2} - \nu(\nu-1)c_\nu - 2\nu c_\nu + \alpha c_\nu\Big] = 0\ . \qquad (\mathbf{VI}.1.40)$$

Da jeder einzelne Koeffizient dieser Reihe verschwinden muss, erhält man daraus für die Koeffizienten c_ν eine zweistufige Rekursionsformel:

$$c_{\nu+2} = \frac{\nu(\nu+1)-\alpha}{(\nu+1)(\nu+2)}c_\nu\ . \qquad (\mathbf{VI}.1.41)$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Legendre-Gleichung (**VI**.1.36) in der Form

$$g_0(x) = c_0 \left(1 + \frac{c_2}{c_0}x^2 + \frac{c_4}{c_0}x^4 + \ldots\right) + c_1 \left(x + \frac{c_3}{c_1}x^3 + \frac{c_5}{c_1}x^5 + \ldots\right) , \qquad (\mathbf{VI}.1.42)$$

wobei die Koeffizienten c_0 und c_1 für den Start der Relation (**VI**.1.41) beliebig gewählt werden können. Nun sind jedoch erneut die Randbedingungen zu berücksichtigen, die an die Lösungen des Eigenwertproblems (**VI**.1.6) gestellt werden mussten: Die Funktionen $Y(\vartheta, \varphi) = F(\vartheta)G(\varphi)$ sollen auf der Oberfläche der Einheitskugel stetig und quadratintegrabel sein; da diese Forderungen für den Faktor $G(\varphi)$ durch die Lösung (**VI**.1.15) erfüllt werden, übertragen sie sich nun auf die Funktionen $F(\vartheta) = f(x) = (1 - x^2)^{m/2} g_m(x)$ und damit auch auf $g_0(x)$. Gemäß der Rekursionsrelation (**VI**.1.41) verhalten sich die Koeffizienten c_ν für große Indizes ν (nämlich für $\nu^2 \gg \alpha$) im Allgemeinen allerdings wie

$$c_{\nu+2} \sim \frac{\nu}{\nu + 2} c_\nu , \qquad (\mathbf{VI}.1.43)$$

so dass das Konvergenzverhalten der beiden Teilreihen in der Lösung (**VI**.1.42) dem der Reihen

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}\ln(1 - x^2) \qquad (\mathbf{VI}.1.44)$$

und

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad (\mathbf{VI}.1.45)$$

gleichen muss; beide dieser Reihen sind für $x \to \pm 1$ logarithmisch divergent. Um eine solche Divergenz auszuschließen und reguläre Lösungen g_0 erhalten zu können, muss daher eine der beiden Teilreihen (**VI**.1.42) *verschwinden* und die andere *abbrechen*. Die erste dieser Forderungen kann einfach durch die Wahl $c_0 = 0$ oder $c_1 = 0$ erfüllt werden, die zweite verlangt jedoch, dass die im Zähler der Rekursionsrelation (**VI**.1.41) auftauchende Separationskonstante α nur bestimmte diskrete Werte annimmt:

$$\alpha = \ell(\ell + 1) \quad \text{für eine ganze Zahl} \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots . \qquad (\mathbf{VI}.1.46)$$

Dann nämlich verschwinden die Koeffizienten c_ν für $\nu > \ell$ und die Reihe (**VI**.1.37) reduziert sich auf ein Polynom vom Grade ℓ. Genau auf diese Weise bestimmen die Bedingungen, denen die Eigenfunktionen $Y(\vartheta, \varphi)$ gehorchen müssen, die Eigenwerte α des Operators $-\Lambda^2$; das hier geübte Verfahren zur Lösung eines Eigenwertproblems für einen linearen Differentialoperator mit Hilfe eines Abbruchkriteriums für eine Potenzreihe wird auch in der Quantenmechanik häufig angewandt.

Mit diesem zentralen Ergebnis (**VI**.1.46) können nun endlich die gesuchten Lösungen des Eigenwertproblems (**VI**.1.6) vollständig angegeben werden: Mit $\alpha = \ell(\ell + 1)$ für positiv-ganzzahliges ℓ ist die Legendre-Gleichung (**VI**.1.36) identisch mit der in Abschnitt **V**.3 betrachteten Gleichung (**V**.3.30); ihre regulären Lösungen $g_0(x)$ sind daher genau die

in Gleichung (**V**.3.32) angegebenen Legendre-Polynome $P_\ell(x)$. Vermöge der Beziehungen (**VI**.1.35) und (**VI**.1.29) sowie unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Index m nach Gleichung (**VI**.1.14) auch negativ sein kann, ergeben sich zunächst die zulässigen Lösungen der Gleichung (**VI**.1.20) in der Form

$$P_\ell^{|m|}(x) = (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{|m|} P_\ell(x) \; ; \tag{**VI**.1.47}$$

diese Funktionen $P_\ell^{|m|}(x)$ sind in der mathematischen Literatur als *zugeordnete Legendre-Funktionen (erster Art)* bekannt. Da nun $P_\ell(x)$ ein Polynom vom Grade ℓ ist, dessen Ableitungen für $|m| > \ell$ verschwinden, ergibt sich hier eine Beschränkung der sinnvollen Werte von m:

$$m = -\ell, -\ell+1, \ldots, +\ell \; . \tag{**VI**.1.48}$$

Man beachte, dass diese zugeordneten Legendre-Funktionen (**VI**.1.47) für ungerade m keine Polynome darstelllen.
Berücksichtigt man weiterhin das Resultat (**VI**.1.15), das die Abhängigkeit vom Azimutalwinkel φ beschreibt, erhält man die nun durch zwei "Quantenzahlen" ℓ, m indizierten Eigenfunktionen des Operators $-\Lambda^2$ in der Gestalt

$$Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) = N_{\ell,m}\, P_\ell^{|m|}(\cos\vartheta) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\right) \; , \tag{**VI**.1.49}$$

wobei die Normierungskonstanten $N_{\ell,m}$ so zu bestimmen sind, dass die Forderung (**VI**.1.7) nach "Normierung auf Eins" erfüllt wird. Die Berechnung des benötigten Normierungsintegrals für die zugeordneten Legendre-Funktionen ist ein wenig mühsam *(Übungsaufgabe!)*, so dass hier nur das Ergebnis angegeben werden soll:

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \left(P_\ell^{|m|}(x)\right)^2 = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+|m|)!}{(\ell-|m|)!} \; . \tag{**VI**.1.50}$$

Damit kann das wichtigste Ergebnis dieses Abschnittes formuliert werden:

> *Die auf der Oberfläche der Einheitskugel stetigen und normierten Lösungen des Eigenwertproblems $-\Lambda^2 Y(\vartheta,\varphi) = \alpha Y(\vartheta,\varphi)$ für den Winkelteil (***VI***.1.3) des Laplace-Operators lauten*
>
> $$Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\; P_\ell^{|m|}(\cos\vartheta)\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \; . \tag{**VI**.1.51}$$
>
> *Sie besitzen die nur von $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ abhängigen Eigenwerte $\alpha = \ell(\ell+1)$; da weiterhin der Index m die Werte $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, +\ell$ annimmt, ist jeder dieser Eigenwerte $(2\ell+1)$-fach entartet.*

Diese Funktionen $Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$ werden als *Kugelflächenfunktionen* bezeichnet; sie bilden ein vollständiges Orthonormalsystem auf der Oberfläche der Einheitskugel. Daher besitzt jede auf der Einheitskugel quadratintegrable Funktion $h(\vartheta,\varphi)$ eine im quadratischen Mittel konvergente Entwicklung

$$h(\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{\ell,m}\, Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) \;, \tag{**VI**.1.52}$$

deren Koeffizienten $c_{\ell,m}$ aufgrund der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen durch

$$c_{\ell,m} = \int \mathrm{d}\Omega\; Y^*_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)\, h(\vartheta,\varphi) \tag{**VI**.1.53}$$

gegeben werden; dabei bezeichnet

$$\int \mathrm{d}\Omega \;\ldots\; = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta \;\ldots \tag{**VI**.1.54}$$

die benötigte Integration über den vollen Raumwinkel, d.h. über die Oberfläche der Einheitskugel, die den Definitionsbereich der Funktionen $Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$ bildet.
Nach der Lösung des Eigenwertproblems (**VI**.1.6) bleibt zur Bestimmung der Lösung einer Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten noch die Radialgleichung für die Funktion $R(r)$ zu lösen, die sich für $\alpha = \ell(\ell+1)$ aus dem Separationsansatz (**VI**.1.4) ergibt; wie Gleichung (**VI**.1.5) zeigt, ist das genau die schon aus Abschnitt **V**.3 bekannte Gleichung (**V**.3.19). Also kann auch deren Lösung (**V**.3.27) übernommen werden, wobei allerdings für jede Funktion $Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$ eigene Koeffizienten $A_{\ell,m}$ und $B_{\ell,m}$ benötigt werden. Damit kann schlussendlich in Verallgemeinerung der bereits bekannten azimutalsymmetrischen Lösung (**V**.3.37) die gesuchte allgemeine Form der Lösung einer Laplace-Gleichung (**VI**.1.1) in Kugelkoordinaten angegeben werden:

$$\boxed{\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left(A_{\ell,m} r^{\ell} + \frac{B_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)} \tag{**VI**.1.55}$$

VI.2 Additionstheorem und sphärische Multipolentwicklung

Eine praktisch wichtige Anwendung finden die Kugelflächenfunktionen (**VI**.1.51) bei der Auswertung der in Abschnitt **V**.4 skizzierten sphärischen Multipol-Entwicklung (**V**.4.18), die auf der Entwicklung (**V**.4.17) des Coulomb-Nenners nach Legendre-Polynomen beruht, also auf der Identität

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}\, P_\ell(\cos\gamma) \;, \tag{**VI**.2.1}$$

wobei $\gamma = \angle(\vec{r},\vec{r}\,')$ die Winkel zwischen dem Vektor $\vec{r}$ zum Beobachtungspunkt und den Vektoren $\vec{r}\,'$ zu einem der Quellpunkte angibt und $r_>$ ($r_<$) den größeren (kleineren) der

beiden Beträge $r = |\vec{r}|$ und $r' = |\vec{r}\,'|$ bezeichnet. Für festgehaltenen Beobachtungspunkt $\vec{r}$ ist daher $P_\ell(\cos\gamma)$ eine schwierige Funktion von $\vec{r}\,'$, so dass die Berechnung der einzelnen Terme der Reihe (**V**.4.18) in dieser Form kaum sinnvoll ist.
Hier hilft die Möglichkeit, den Ausdruck $P_\ell(\cos\gamma)$ nach Kugelflächenfunktionen zu entwickeln. Hält man dazu $\vec{r}\,'$ fest, wird $P_\ell(\cos\gamma)$ eine Funktion der Polarwinkel ϑ, φ von $\vec{r}$ mit den festgehaltenen Polarwinkeln ϑ', φ' von $\vec{r}\,'$ als Parametern. Gemäß der allgemeinen Darstellung (**VI**.1.52) existiert daher eine Entwicklung der Form

$$P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell'}^{\ell'} c_{\ell',m}(\vartheta',\varphi')\, Y_{\ell',m}(\vartheta,\varphi)\ , \tag{**VI**.2.2}$$

wobei die Parameterabhängigkeiten von den Entwicklungskoeffizienten getragen werden. Diese Entwicklung lässt sich nun deutlich vereinfachen: Legt man die z-Achse des Koordinatensystems in Richtung von $\vec{r}\,'$, so wird $\gamma = \angle(\vec{r},\vec{r}\,')$ zu dem üblichen Polarwinkel ϑ. Darüber hinaus hat man die Darstellung

$$Y_{\ell,0}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\vartheta) \tag{**VI**.2.3}$$

sowie die Eigenwertgleichung

$$-\Lambda^2\, Y_{\ell,0}(\vartheta,\varphi) = \ell(\ell+1)\, Y_{\ell,0}(\vartheta,\varphi)\ , \tag{**VI**.2.4}$$

so dass für diese spezielle Wahl der z-Achse die Funktion $P_\ell(\cos\gamma) = P_\ell(\cos\vartheta)$ im Eigenraum zum Eigenwert $\ell(\ell+1)$ des Operators $-\Lambda^2$ liegt. Dieser Befund muss dann aber für *jede* Wahl der z-Achse gelten, so dass $P_\ell(\cos\gamma)$ *immer* als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen nur zum Index ℓ dargestellt werden kann:

$$P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_m(\vartheta',\varphi')\, Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)\ ; \tag{**VI**.2.5}$$

die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen führt entsprechend der allgemeinen Beziehung (**VI**.1.53) sofort auf die Koeffizienten

$$c_m(\vartheta',\varphi') = \int \mathrm{d}\Omega\ Y^*_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) P_\ell(\cos\gamma)\ . \tag{**VI**.2.6}$$

Benutzt man andererseits die Darstellung (**VI**.2.3), so erhalten die Koeffizienten der allgemeinen Entwicklung (**VI**.1.52) einer Funktion $h(\vartheta,\varphi)$ für $m = 0$ die Gestalt

$$c_{\ell,0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int \mathrm{d}\Omega\ P_\ell(\cos\vartheta)\, h(\vartheta,\varphi)\ . \tag{**VI**.2.7}$$

Der Vergleich dieser beiden Ausdrücke macht deutlich, dass die gesuchten Koeffizienten $c_m(\vartheta',\varphi')$ auch aufgefasst werden können als Koffizienten zu $m' = 0$, die bei der Entwicklung der Funktion $\sqrt{4\pi/(2\ell+1)}Y^*_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$ nach Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m'}(\gamma,\beta)$

auftreten, deren Polarwinkel γ, β bezüglich einer durch die Richtung von $\vec{r}\,'$ festgelegten z-Achse gemessen werden, da ja in dem Ausdruck (**VI**.2.6) der Faktor $P_\ell(\cos\gamma)$ anstelle von $P_\ell(\cos\vartheta)$ auftritt; entsprechend sind dann in Gleichung (**VI**.2.6) die Polarwinkel ϑ und φ durch γ und β auszudrücken und die Winkelintegration ist in der Form

$$\int \mathrm{d}\Omega \,\ldots \;=\; \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\gamma\, \sin\gamma \,\ldots \tag{**VI**.2.8}$$

auszuführen.
Für die in der zweiten Gleichung (**VI**.2.7) auftretenden Koeffizienten $c_{\ell,0}$ erhält man nun eine einfache Beziehung, indem man die Entwicklung (**VI**.1.52) einer auf der Einheitskugel definierten Funktion $h(\vartheta,\varphi)$ bei $\vartheta = 0$, also am Nordpol auswertet: Denn dort darf es, da der Nordpol nur aus einem einzigen Punkt besteht, keine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel φ mehr geben; das wird in den Kugelflächenfunktionen dadurch sichergestellt, dass $P_\ell^{|m|}(\cos\vartheta)$ gemäß der Darstellung (**VI**.1.47) proportional zu $(\sin\vartheta)^{|m|}$ ist und somit für $m \neq 0$ am Nordpol verschwindet. Daher reduziert sich die Enwicklung (**VI**.1.52) für $\vartheta = 0$ auf die einfache Summe

$$\begin{aligned} h(\vartheta=0,\varphi) \;&=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell,0}\, Y_{\ell,0}(\vartheta=0,\varphi) \\ &=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, c_{\ell,0}\;, \end{aligned} \tag{**VI**.2.9}$$

wobei erneut der Ausdruck (**VI**.2.3) sowie $P_\ell(1) = 1$ benutzt wurde. Bei Anwendung dieses Zusammenhangs auf die Funktion

$$h(\gamma,\beta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_{\ell,m}^{*}\Big(\vartheta(\gamma,\delta),\varphi(\gamma,\delta)\Big) \tag{**VI**.2.10}$$

am zugehörigen Nordpol $\gamma = 0$ erhält man, da sich die Reihe (**VI**.2.9) nun auf einen einzigen Term reduziert, die Beziehung

$$c_{\ell,0} = \frac{4\pi}{2\ell+1}\, Y_{\ell,m}^{*}\Big(\vartheta(\gamma,\delta),\varphi(\gamma,\delta)\Big)\Big|_{\gamma=0}\;; \tag{**VI**.2.11}$$

da schließlich $\vartheta = \vartheta'$ und $\varphi = \varphi'$ für $\gamma = 0$, folgt

$$c_m(\vartheta',\varphi') = \frac{4\pi}{2\ell+1}\, Y_{\ell,m}^{*}(\vartheta',\varphi')\;. \tag{**VI**.2.12}$$

Einsetzen dieser Koeffizienten in die Entwicklung (**VI**.2.5) liefert eine wichtige Identität, die als *Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen* bezeichnet wird:

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell,m}^{*}(\vartheta',\varphi')\, Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)\;. \tag{**VI**.2.13}$$

Mit diesem Additionstheorem (**VI**.2.13) kann nun eine endgültige Form der sphärischen Multipol-Entwicklung angegeben werden. Man geht dazu aus von der erweiterten Entwicklung

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}\, P_\ell(\cos\gamma) \\ &= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{1}{2\ell+1}\, \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}\, Y^*_{\ell,m}(\vartheta',\varphi')\, Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) \qquad (\mathbf{VI}.2.14)\end{aligned}$$

und erhält daraus für das (Fernfeld-)Potential einer lokalisierten Ladungsverteilung sofort die Multipol-Reihe

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r'\, \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell,m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \int \mathrm{d}^3 r'\, \varrho(\vec{r}\,')\, r'^\ell\, Y^*_{\ell,m}(\vartheta',\varphi')\, \frac{Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)}{r^{\ell+1}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell,m} \frac{4\pi}{2\ell+1}\, q_{\ell,m}\, \frac{Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)}{r^{\ell+1}}\,, \qquad (\mathbf{VI}.2.15)\end{aligned}$$

wobei wie üblich $|\vec{r}| > |\vec{r}\,'|$ vorausgesetzt wurde und die *sphärischen Multipolmomente*

$$q_{\ell,m} = \int \mathrm{d}^3 r'\, Y^*_{\ell,m}(\vartheta',\varphi')\, r'^\ell\, \varrho(\vec{r}\,') \qquad (\mathbf{VI}.2.16)$$

eingeführt wurden. In wesentlichem Unterschied zu den kartesischen Multipolmomenten sind diese sphärischen Momente voneinander unabhängig: So hat man etwa für $\ell = 2$ genau $2\ell+1 = 5$ unabhängige sphärische Momente, entsprechend den $6-1$ unabhängigen Komponenten des symmetrischen und spurfreien kartesischen Quadrupoltensors.
Abschließend sei angemerkt, dass eine Multipol-Entwicklung der Form (**VI**.2.15) auch verwendet wird, um das durch die inhomogene Massenverteilung des Erdkörpers erzeugte Gravitationspotential in Erdnähe zu charakterisieren; die Kenntnis der höheren Momente ist von großer Bedeutung für die präzise Berechnung von Satellitenbahnen.

Index

Abbruchkriterium, 179
Ableitung, 5
Abstand, 54
Adams-Bashforth-Verfahren, 84
Adams-Moulton-Verfahren, 86
Additionstheorem
    der Kugelflächenfunktionen, 183
Ampere, 123
Anfangsbedingung, 26
Anfangswertproblem, 33, 82
Arbeit, 58, 157, 172

BAC-CAB-Regel, 168
Beschleunigung, 54
Bezugssystem, 52
Bildbereich, 5
Binomialreihe, 17
Binormale, 13
Biot-Savart-Gesetz, 165
Bogenlänge, 10, 54

cgs-System, 124
Chaos, 88, 92
Coulomb, 123
Coulomb-Eichung, 164
Coulomb-Potential, 80

Definitionsbereich, 5
Delta-Distribution, 130
Dielektrizitätskonstante, 124
Differential, 38
    exaktes, 59
    totales, 39
Differentialgleichung, 6
    Clairaut-, 47, 51
    exakte, 39
    explizite, 25
    gewöhnliche, 24
    homogene, 31
    implizite, 25, 47
    inhomogene, 31
    Legendre-, 150, 178
    lineare, 31
    partielle, 25
    verallgemeinerte Legendre-, 177
Dipolmoment
    elektrisches, 155, 160
    magnetisches, 168
Divergenz, 100, 101
Draht, 165
Drehimpuls, 57, 68
Drehimpulsbarriere, 70
Drehimpulserhaltung, 58, 67, 69, 76
Drehmoment, 58
Dreibein, begleitendes, 13

Eichfreiheit, 164
Eigenwertgleichung, 174
einfacher Zusammenhang, 44, 46, 61
elektrische Feldstärke, 122
elektrische Ladungsdichte, 122
elektrische Stromdichte, 122
Elektrostatik, 128
elektrostatischer Druck, 161
Ellipse, 66, 74
Energie, 60
    kinetische, 58
    potentielle, 60
Energiedichte, 173
    des elektrischen Feldes, 159
    des magnetischen Felds, 173
Energieerhaltung, 60, 62
Epsilon-Tensor, 102
Erdung, 137
Erhaltungsgröße, 88
    lokale, 125
euklidischer Raum, 53
Euler-Verfahren, 83
Existenzsatz von Peano, 35
Exponentialreihe, 16

Fahrstrahl, 76
Farad, 162
Fixpunkt

instabiler, 63
stabiler, 63
Flächenelement, 105, 109
Flächengeschwindigkeit, 76
Flächenintegral, 104
Flächenladungsdichte, 137
Fluchtgeschwindigkeit, 28
freier Fall, 26
Freiheitsgrad, 62, 70, 88
Frenetsche Formeln, 14, 55
Funktion, 5
analytische, 15
implizite, 39
Funktionalanalysis, 143
Funktionaldeterminante, 108

Gamma-Funktion, 23
Gegeninduktivität, 169
geometrische Reihe, 16
Geschwindigkeit, 54
Gradient, 60, 99, 102
Gravitationsfeld, 26, 71
Greensche Funktion, 132
Dirichletsche, 135
Neumannsche, 136

Halbachsen einer Ellipse, 74
harmonischer Oszillator, 64, 73
Hauptnormale, 12, 55
Henon-Heiles-Modell, 94
Henry, 171
Hohlleiter, 146
Hyperbel, 78

Impuls, 56, 57
Induktionsgesetz, 126, 170
Inertialsystem, 55
Infinitesimalrechnung, 5
Integrabilitätsbedingung, 44, 61, 128
integrables System, 89
Integral, bestimmtes, 19
Integral, unbestimmtes, 19
Integralrechnung, 19
Integralsatz
von Gauß, 114, 115
von Green; erster, 117
von Green; zweiter, 117
von Stokes, 119, 121

KAM-Theorem, 91
Kapazität, 162
Kegelschnitt, 74
Kepler-Problem, 71
Keplersche Gesetze, 76
Kettenregel, 7, 39
Kontinuitätsgleichung, 124
Konvergenzradius, 15
Koordinatensystem, 52
Krümmung, 11, 55
Kraft, 57
Kraftfeld, 58
konservatives, 59
Kugelflächenfunktionen, 181
Kurvenintegral, 41

Laplace-Gleichung, 129, 140, 174
Laplace-Operator, 25, 116
in Kugelkoordinaten, 148, 174
Legendre-Funktionen, zugeordnete, 180
Legendre-Polynome, 150, 180
Legendre-Transformation, 49, 50
Lenzsche Regel, 128, 171
Levi-Civita-Symbol, 102
Lichtgeschwindigkeit, 124
Liouville-Arnold-Theorem, 89
Lipschitz-Bedingung, 36
Lipschitz-Stetigkeit, 36
lokaler Fehler, 83

magnetische Feldkonstante, 123
magnetische Induktion, 122
magnetisches Moment, 168
Magnetostatik, 163
Masse, 56
Maxwell-Gleichungen, 122
Mechanik, 52, 57
Newtonsche, 52
Mehrschritt-Verfahren, 84
MKSA-System, 122
Multipol-Entwicklung, 154, 167, 181

kartesische, 155
sphärische, 157, 184

Nabla-Operator, 59, 99
Newtonsche Axiome, 55
Normalenvektor, 109
numerische Integration, 82

Orthogonalität von Funktionen, 144

Parameterdarstellung, 37, 68
partielle Integration, 22, 115
Phasenraum, 65, 89
Plattenkondensator, 162
Poincaré-Schnitt, 95
Poisson-Gleichung, 128, 164
Polarkoordinaten, 67
Potential, 59
effektives, 70
elektrostatisches, 128
Potenzreihenansatz, 178
Predictor-Corrector-Verfahren, 86
Produktregel, 7
Punktladung, 101, 129, 159

Quadratintegrabilität, 143, 174
quadratisches Mittel, 144, 181
Quadrupolmoment, 156, 160, 184
Quasi-Stationarität, 170

Radialsymmetrie, 67
Randwertproblem, 133, 137
Dirichlet-, 135
Neumann-, 136
Raumkurve, 9
reguläre Bewegung, 98
Rotation, 61, 102, 104
Runge-Kutta-Verfahren, 87, 88
Rutherfordsche Streuformel, 81

Schraubenlinie, 9, 11
Selbstenergie, 159
Selbstinduktivität, 170
Separationsansatz, 141, 146, 148, 174
Separatrix, 66
SI-System, 122
Skalarprodukt, 144
Skalierung, 93
Spannung, 162
Spiegelladung, 137
Spule, 171
Stabilität, 57
Stammfunktion, 19, 39, 43, 59
stochastischer See, 98
Stoßparameter, 77
Streuung, 77
Streuwinkel, 77
Stromfaden, 165
Substitutionsregel, 21
Summenkonvention, 53
symmetrische Darstellung, 38

Tangentialvektor, 10, 54
Taylorentwicklung, 14, 43, 83, 154
Tesla, 165
Topologie, 46, 89
Torsion, 13
Torus, 89, 90
Trajektorie, 9
Transformationsformel, 107, 112
Trennung der Variablen, 29

Umkehrfunktion, 8, 38
Umkehrpunkt, 63

Variablenwechsel, 50, 108
Variation der Konstanten, 33
Vektoranalysis, 98
Vektorfeld, 41
Vektorpotential, 163
Verschiebungsstrom, 127
vollständiges Orthonormalsystem, 144, 181
Vollständigkeitsrelation, 145
Volt, 162
Volumenintegral, 110

Wegunabhängigkeit, 43, 59
Wirkungsquerschnitt, 81

Zeit, 53
Zentralkraftfeld, 67
Zirkulation, 120

Einige Literaturvorschläge

Ein Klassiker, der in besonders prägnanter Weise an den in der Physik üblichen Umgang mit der Mathematik heranführt:

- Siegfried Großmann:
  Mathematischer Einführungskurs für die Physik.
  Vieweg+Teubner Verlag — Springer Fachmedien Wiesbaden (10. Auflage, 2012).

Ein bewährtes Lehrbuch für das Studium gewöhnlicher Differentialgleichungen:

- Wolfgang Walter:
  Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung.
  Springer-Verlag Berlin Heidelberg (7. Auflage, 2000).

Eine moderne Einführung in die Theoretische Mechanik, die allerdings bereits auch „fortgeschrittene“ Themen behandelt:

- Jorge V. José, Eugene J. Saletan:
  Classical Dynamics. A Contemporary Approach.
  Cambridge University Press (1998).

Ein ausgezeichnetes Lehrbuch für die erste Begegnung mit der Elektrodynamik:

- David J. Griffiths:
  Introduction to Electrodynamics.
  Addison-Wesley (Fourth edition, 2012).