Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 11. Juni 2018

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2018, Übungsblatt 11)

`https://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/ETP/`

Abgabe: Dienstag, 19. Juni bis 10:15 Uhr

41) **Fläche einer Wendelrampe**

Eine Wendelrampe mit Durchmesser $2r_0$ und Ganghöhe a wird parametrisiert durch

$$\vec{r}(r,\varphi) = \left(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi,\, \frac{a\varphi}{2\pi}\right)$$

mit $0 \leq r \leq r_0$ und $\varphi \geq 0$. Berechnen Sie die Fläche F dieser Rampe für einen Umlauf. Zeigen Sie, dass das Verhältnis $F/(\pi r_0^2)$ nur von dem dimensionslosen Parameter $\kappa = a/(2\pi r_0)$ abhängt und stellen Sie sicher, dass Ihr Resultat für $\kappa \to 0$ und $\kappa \to \infty$ die jeweils zu erwartende Form annimmt. **(2P)**

42) **Modifiziertes Coulomb-Gesetz**

Präzisionsmessungen im Praktikum ergeben ein sensationelles Resultat: Die Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 bei $\vec{r}_1$ und q_2 bei $\vec{r}_2$ wird nicht genau durch das Coulomb-Gesetz beschrieben, sondern durch ein modifiziertes Kraftgesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\left(1 + \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|/\lambda}\,\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\ .$$

(Allerdings ist die Konstante λ, die die Dimension einer Länge trägt, derart groß, dass das vorher noch niemandem aufgefallen war.) Nach wie vor gilt das Superpositionsprinzip.

a) Besitzt das elektrische Feld $\vec{E}$ einer Punktladung q im Ursprung, das mit diesem Kraftgesetz verträglich ist, ein Potential Φ? Falls ja, wie lautet es?

b) Zeigen Sie für eine Punktladung q im Ursprung die Beziehung

$$\int_{\partial K_R} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E} + \frac{1}{\lambda^2}\int_{K_R}\mathrm{d}^3r\,\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\ ,$$

wobei K_R eine Kugel mit Radius R um den Ursprung bezeichnet.

c) Welche Gleichung tritt also nun an die Stelle der Poisson-Gleichung? Wie lautet der Zusammenhang zwischen einer lokalisierten Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ und dem zugehörigen Potential $\Phi(\vec{r})$? **(3P)**

43) **Weitere Identitäten für den Nabla-Operator**

Es seien $\vec{u}(\vec{r})$, $\vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w}(\vec{r})$ differenzierbare Vektorfelder. Beweisen Sie die folgenden Identitäten mit Hilfe des total antisymmetrischen Tensors ε_{ijk}:

a)
$$\operatorname{rot}\vec{v}\times\vec{w} = \vec{v}\,\operatorname{div}\vec{w} - \vec{w}\,\operatorname{div}\vec{v} + (\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}$$

b)
$$\operatorname{grad}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + 2\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v}$$

c)
$$\vec{u}\cdot\Big((\vec{v}\times\vec{\nabla})\times\vec{w}\Big) = \Big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}\Big)\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v}\,\operatorname{div}\vec{w}$$

(2P)

44) **Die Divergenz in krummlinig-orthogonalen Koordinatensystemen**

Ein Punkt im Raum werde durch drei Koordinaten u, v, w spezifiziert; etwa in sphärischen Polarkoordinaten durch $u = r$, $v = \vartheta$ und $w = \varphi$. Dieses „krummlinige" Koordinatensystem soll *orthogonal* sein, so dass die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$ und $\vec{e}_w$, die in jedem Raumpunkt in Richtung der zugehörigen Koordinatenlinie zeigen, senkrecht aufeinander stehen. Eine infinitesimale Verschiebung $\mathrm{d}\vec{r}$ von (u, v, w) nach $(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v, w + \mathrm{d}w)$ besitzt dann die Form

$$\mathrm{d}\vec{r} = f\,\mathrm{d}u\,\vec{e}_u + g\,\mathrm{d}v\,\vec{e}_v + h\,\mathrm{d}w\,\vec{e}_w$$

mit spezifischen Funktionen $f = f(u, v, w)$, $g = g(u, v, w)$ und $h = h(u, v, w)$.

a) Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{A}(u, v, w) = A_u\vec{e}_u + A_v\vec{e}_v + A_w\vec{e}_w\ .$$

Benutzen Sie die bekannte Integraldarstellung der Divergenz,

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial(\Delta V)}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{A}\ ,$$

um zu zeigen, dass die Divergenz von $\vec{A}$ im (u, v, w)-System durch

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{fgh}\left[\frac{\partial}{\partial u}(ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w}(fgA_w)\right]$$

gegeben wird.

Hinweis: Betrachten Sie ein Volumen ΔV, dessen Grenzflächen mit Koordinatenebenen des (u, v, w)-Systems zusammenfallen. Die Normalenvektoren $\mathrm{d}\vec{f}$ der Flächenelemente weisen stets aus dem Volumen ΔV heraus.

b) Welche Gestalt besitzt daher $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ in sphärischen Polarkoordinaten? **(3P)**