Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 18. Juni 2018

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2018, Übungsblatt 12)

`https://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/ETP/`

Abgabe: Dienstag, 26. Juni bis 10:15 Uhr

45) **Fingerübungen zum Gaußschen Integralsatz**

Bestätigen Sie die Identität

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}(\vec{r}\,) \cdot \vec{v}(\vec{r}\,) = \int_V \mathrm{d}V \, \mathrm{div}\, \vec{v}(\vec{r}\,)$$

für die folgenden beiden Fälle:

a) Das Volumen V wird begrenzt durch den im 1. Oktanden gelegenen Teil der Ebene $x + 2y + 3z = 4$ sowie durch die Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$; das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}\,)$ wird gegeben durch

$$\vec{v}(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} x^2yz \\ xy^2z \\ xyz^2 \end{pmatrix} .$$

b) Das Volumen V ist ein Zylinder vom Radius R_0, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt und der durch die Ebenen $z = 0$ sowie $z = H$ begrenzt wird; das Vektorfeld ist $\vec{v}(\vec{r}\,) = \vec{r}\,$. **(4P)**

46) **Partielle Integration mit dem Gaußschen Satz**

Es seien $\vec{v}(\vec{r}\,)$ und $\vec{w}(\vec{r}\,)$ differenzierbare Vektorfelder; $\varphi(\vec{r}\,)$ sei ein differenzierbares Skalarfeld. Weiterhin sei V ein reguläres Volumen mit der Oberfläche ∂V. Beweisen Sie die folgenden beiden Identitäten:

a)

$$\int_V \mathrm{d}V \, \vec{v} \times \mathrm{grad}\, \varphi = \int_{\partial V} \varphi \, \vec{v} \times \mathrm{d}\vec{f} + \int_V \mathrm{d}V \, \varphi \, \mathrm{rot}\, \vec{v}$$

b)

$$\int_V \mathrm{d}V \, \vec{w} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{v} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) + \int_V \mathrm{d}V \, \vec{v} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{w}$$

(2P)

47) **Was ist $\boldsymbol{\Delta \frac{1}{r}}$?**

a) Zeigen Sie, dass

$$\Delta \frac{1}{r} = 0$$

in jedem offenen Gebiet, das den Koordinatenursprung $\vec{r} = \vec{0}$ nicht enthält.

b) Es sei nun $\psi(\vec{r})$ ein glattes Skalarfeld. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_V \mathrm{d}V\, \psi(\vec{r})\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\, \psi(\vec{0})$$

für jedes Volumen V, das den Koordinatenursprung $\vec{r} = 0$ enthält.

Hinweis: Beachten Sie, dass nach a)

$$\int_V \mathrm{d}V\, \psi(\vec{r})\Delta\frac{1}{r} = \int_{K_\varepsilon} \mathrm{d}V\, \psi(\vec{r})\Delta\frac{1}{r}$$

für jede ε-Kugel K_ε, die den Ursprung enthält. **(2P)**

48) **Der Laplace-Operator in Zylinder- und Polarkoordinaten**

Welche Form besitzt der Laplace-Operator in Zylinder- bzw. in sphärischen Polarkoordinaten?

Hinweis: Benutzen Sie die Resultate der Aufgaben 40 und 44. **(2P)**