Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 25. Juni 2018

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2018, Übungsblatt 13)

`https://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/ETP/`

Abgabe: Dienstag, 2. Juli bis 10:15 Uhr

49) **Zum Stokesschen Integralsatz**

a) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2xz + 3y^2 \\ 4yz^2 \end{pmatrix} .$$

Verifizieren Sie die Aussage des Stokesschen Satzes für das Einheitsquadrat in der y-z-Ebene mit den Ecken $(0,0,0)^{\mathrm{t}}$, $(0,1,0)^{\mathrm{t}}$, $(0,1,1)^{\mathrm{t}}$ und $(0,0,1)^{\mathrm{t}}$.

b) Es sei $\vec{v}(\vec{r}\,)$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi(\vec{r}\,)$ ein differenzierbares Skalarfeld. Weiterhin sei F ein reguläres Flächenstück mit Rand ∂F. Zeigen Sie, dass

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f} \cdot \varphi \vec{\nabla} \times \vec{v} = \oint_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \, \cdot \varphi \vec{v} + \int_F \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{v} \times \vec{\nabla}\varphi \, .$$

(2P)

50) **Varianten des Stokesschen Satzes**

Es sei $\vec{v}(\vec{r}\,)$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi(\vec{r}\,)$ ein differenzierbares Skalarfeld. Weiterhin sei F ein reguläres Flächenstück mit Rand ∂F. Drücken Sie jedes der folgenden beiden Linienintegrale über ∂F durch ein Flächenintegral über F aus:

(i)

$$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \, \varphi$$

(ii)

$$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{v}$$

(2P)

51) **Energietransport in einem Koaxialkabel**

Ein in z-Richtung orientiertes Koaxialkabel der Länge ℓ bestehe aus einem inneren zylindrischen Leiter mit Radius a und einem äußeren Leiter mit Radius b; es sei an einem Ende an eine Batterie und am anderen Ende an einen Widerstand angeschlossen. Der innere Leiter trage die Ladung Q und führe einen Strom I, der äußere Leiter trägt daher die Ladung $-Q$ und führt den entgegengesetzten Strom $-I$.

a) Berechnen Sie das elektrische und das magnetische Feld zwischen den beiden Leitern. Randeffekte dürfen vernachlässigt werden.

b) Der Vektor

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

gibt die *Energiestromdichte* des elektromagnetischen Feldes an, also die pro Fläche und Zeit in Richtung von $\vec{S}$ fließende Energie. Berechnen Sie damit die gesamte im Kabel transportierte Leistung P. Zeigen Sie weiterhin, dass diese Leistung der Beziehung $P = UI$ gehorcht, wobei die Spannung

$$U = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

wie üblich durch ein Linienintegral des elektrischen Feldes vom Innen- zum Außenleiter gegeben wird. **(3P)**

52) **Zerlegung eines Vektorfeldes in ein Gradienten- und ein Wirbelfeld**

Den Hintergrund dieser letzten Aufgabe liefert die folgende Frage: Die Maxwell-Gleichungen legen die Divergenz und die Rotation der beiden Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ fest. Sind diese Felder damit eindeutig bestmmt?

Es sei $D(\vec{r})$ ein stetiges Skalarfeld und $\vec{C}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld mit der Eigenschaft $\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$. Betrachten Sie die Felder

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \, \frac{D(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ \vec{W}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{aligned}$$

sowie die daraus konstruierte Summe

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{r}) \; .$$

a) Unter welcher Voraussetzung an $D(\vec{r})$ und $\vec{C}(\vec{r})$ existieren die Integrale $U(\vec{r})$ und $\vec{W}(\vec{r})$?

b) Zeigen Sie, dass dann $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = D(\vec{r})$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{C}(\vec{r})$.
<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie die bekannte Beziehung

$$\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \; .$$

c) Sofern also ein Skalarfeld $D(\vec{r})$ und ein quellenfreies Vektorfeld $\vec{C}(\vec{r})$ vorgegeben sind *und* beide die Voraussetzung aus a) erfüllen, kann explizit ein Feld $\vec{F}(\vec{r})$ konstruiert werden, das $D(\vec{r})$ als Divergenz und $\vec{C}(\vec{r})$ als Rotation besitzt; dieses Feld $\vec{F}(\vec{r})$ kann zudem als Summe eines Gradienten- und eines Wirbelfeldes dargestellt werden. Ist diese Zerlegung sogar *eindeutig*? **(3P)**