Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 6. November 2017

Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik*

(WiSe 2017/18, Übungsblatt 4)

`http://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/statistik/`

Abgabe: Montag, 13. November bis 12:00 Uhr

13) Das klassische ideale Gas im kanonischen Ensemble

Die kanonische Zustandssumme eines klassischen idealen Gases der Temperatur T, das aus N Teilchen der Masse m besteht und ein Volumen V einnimmt, lautet bekanntlich

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda_T^3}\right)^N \quad .$$

Dabei ist $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}$ die thermische Wellenlänge der Teilchen.

a) Berechnen Sie die kanonische Freie Energie des Gases und daraus den Druck, die Entropie und das chemische Potential als Funktionen der Temperatur.

b) Diskutieren Sie anhand der Beziehung

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} \quad ,$$

warum das chemische Potential bei hinreichend hohen Temperaturen, bei denen das Gas klassisch behandelt werden darf, *negativ* sein muss. **(2P+1P*)**

14) Klassische harmonische Oszillatoren

Gegeben ist ein System aus $N \gg 1$ *unterscheidbaren*, nicht miteinander wechselwirkenden klassischen dreidimensionalen harmonischen Oszillatoren mit identischer Oszillatorfrequenz ω:

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{q}_i^{\,2}\right) \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass die Entropie dieses Systems im *mikrokanonischen* Ensemble durch den Ausdruck

$$S(E,\omega,N) = 3Nk_{\mathrm{B}}\left[\ln\left(\frac{E}{3N\hbar\omega}\right) + 1\right]$$

gegeben wird, und schließen Sie daraus auf die Beziehung zwischen der Energie E und der Temperatur T.

b) Zeigen Sie, dass die mikrokanonische Energiefunktion $E(S, \omega, N)$ die Voraussetzung für eine Legendre-Transformation bzgl. der Entropie S erfüllt, und berechnen Sie mit Hilfe dieser Transformation die Freie Energie $F(T, \omega, N)$.

c) Berechnen Sie nun die *kanonische* Zustandssumme des Oszillatorsystems, und daraus die kanonische Freie Energie als Funktion der Temperatur. **(3P)**

15) **Ideales Gas im Schwerefeld als kanonisches Ensemble**

Untersuchen Sie noch einmal das schon aus Aufgabe 6 bekannte System, jetzt allerdings im *kanonischen* Ensemble:

Gegeben ist eine sehr große Zahl N von nichtwechselwirkenden klassischen Teilchen der Masse m, die sich im Schwerefeld der Erde befinden und in einem (nach oben unendlich ausgedehnten) Zylinder mit der Querschnittsfläche A eingesperrt sein sollen. Die Hamiltonfunktion des Systems innerhalb des Zylinders lautet also

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + mgz_i \right) \ .$$

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die Freie Energie des Systems.

b) Berechnen Sie die „kanonische Energie“ E des Systems als Funktion der Temperatur und vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem der mikrokanonischen Rechnung. **(2P)**

16) **Die Verteilung der kinetischen Energie in einem Boltzmann-Gas**

a) Die N Teilchen eines realen klassischen Gases gehorchen der bekannten Maxwell-Boltzmannschen Geschwindigkeitsverteilung. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Teilchen mit einer kinetischen Energie zwischen E und $E + \mathrm{d}E$ durch

$$N\, P_1(E)\, \mathrm{d}E = N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(k_\mathrm{B}T)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{-E/(k_\mathrm{B}T)} \sqrt{E}\, \mathrm{d}E$$

gegeben wird.

b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_2(E)$ dafür, dass zwei beliebig aus diesem Boltzmann-Gas herausgegriffene Teilchen *zusammen* die kinetische Energie E haben? — Zeigen Sie mit Hilfe dieser Dichte die Beziehung $\langle E \rangle = 3k_\mathrm{B}T$. Warum ist dieses Resultat auch ohne Rechnung plausibel? **(3P)**