

**Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik***

(WiSe 2017/18, Übungsblatt 6)

<http://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/statistik/>

**Abgabe:** Montag, 27. November bis 12:00 Uhr

**20) Wie funktioniert ein Kühlschrank?**

a) In einem Kühlaggregat expandiert ein Gas bei konstanter Enthalpie. Drücken Sie den Koeffizienten, der die dabei auftretende Temperaturänderung bestimmt, durch experimentell leicht zugängliche Größen aus:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p} \left[ T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right].$$

b) Kühlt sich ein van der Waals-Gas bei isenthalper Expansion ab oder erwärmt es sich?

c) Warum sind ideale Gase zum Betrieb eines Kühlschranks ungeeignet? **(2P)**

**21) Energiefluktuationen im kanonischen Ensemble**

a) Der kanonische Erwartungswert der Energie eines Systems im thermischen Kontakt mit einer Umgebung der Temperatur  $T$  wird bekanntlich gegeben durch

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z,$$

wobei  $\beta = 1/(k_B T)$  und  $Z$  die Zustandssumme des Systems bezeichnet. Zeigen Sie, dass die kanonischen Energiefluktuationen durch

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = k_B T^2 C_V$$

und

$$\langle (E - \langle E \rangle)^3 \rangle = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (k_B T^2 C_V)$$

beschrieben werden.

b) Welche Werte besitzen daher die normierten zentrierten Momente  $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle / \langle E \rangle^2$  und  $\langle (E - \langle E \rangle)^3 \rangle / \langle E \rangle^3$  für ein klassisches einatomiges ideales Gas? **(2P)**

Bemerkung: Hier deutet sich ein wichtiges Prinzip an. Die  $n$ -te Ableitung  $(-\partial/\partial\beta)^n \ln Z = \kappa_n$  liefert die  $n$ te *Kumulante*  $\kappa_n$  der kanonischen Verteilung. Diese Kumulanten lassen sich auf die zentrierten Momente  $\mu_n$  zurückführen; z.B. ist  $\kappa_2 = \mu_2$ ,  $\kappa_3 = \mu_3$  und  $\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$ .

Kumulanten sind zur Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen besonders gut geeignet; für eine Gaußverteilung ist  $\kappa_n = 0$  für  $n \geq 3$ .

## 22) Quantenmechanische Oszillatoren als kanonisches Ensemble

a) Betrachten Sie wie schon in Aufgabe 11 wieder ein System von  $N \gg 1$  unterscheidbaren, nicht miteinander wechselwirkenden quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren, die alle die gleiche Oszillatorfrequenz  $\omega$  haben, nun aber im *kanonischen* Ensemble: Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die Freie Energie dieses Systems und zeigen Sie, dass der „kanonische“ Zusammenhang zwischen Energie und Temperatur durch die bereits in Aufgabe 11 auf mikrokanonischem Wege gefundene Beziehung gegeben wird.

b) Zeigen Sie, dass die spezifische Wärmekapazität dieses quantenmechanischen Oszillatorsystems für  $T \rightarrow 0$  verschwindet, für  $k_B T \gg \hbar\omega$  jedoch konstant wird. Wie verhält sich demgegenüber ein klassisches Oszillatorsystem? (Siehe dazu Aufgabe 14!) **(2P)**

## 23) Quantenmechanischer Paramagnetismus

a) Ein Atom mit Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  besitzt ein magnetisches Moment

$$\vec{\mu} = -g\mu_B \vec{J} / \hbar ,$$

wobei  $g$  den zugehörigen  $g$ -Faktor und  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton bezeichnet. Die Energie eines solchen Momentes in einem Magnetfeld  $\vec{B}$  lautet

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = g\mu_B B m ;$$

dabei ist  $m = -j, -j+1, \dots, +j$  die magnetische Quantenzahl. Betrachten Sie ein System, das aus  $N$  solcher Momente in einem Volumen  $V$  besteht; die einzelnen Momente sollen unterscheidbar sein und nicht miteinander wechselwirken. Zeigen Sie, dass dann der kanonische Erwartungswert der Magnetisierung (also des gesamten magnetischen Momentes pro Volumeneinheit) durch

$$M = \frac{N}{V} g\mu_B j \left[ \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \coth\left(\left(1 + \frac{1}{2j}\right) x\right) - \frac{1}{2j} \coth\left(\frac{x}{2j}\right) \right]$$

gegeben wird, wobei  $x = \beta g\mu_B B j$ . Wie verhält sich diese Magnetisierung insbesondere bei tiefen bzw. bei hohen Temperaturen?

b) Welche Form erhält die Magnetisierung für den kleinstmöglichen Drehimpuls  $j = 1/2$ ? — In welchem Grenzfall wird das Resultat „klassisch“? Wie lautet also die Magnetisierung eines klassischen Paramagneten? **(4P)**