

Signalübertragung auf LC-Ketten und Koaxialkabeln

Stichworte:

LC-Glied, LC-Ketten, Koaxialkabel, Übertragungsleitung, Dispersion, Dämpfung, Wellengleichung, Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit, Wellenwiderstand, FOURIER-Theorem.

Messprogramm:

Signalverzerrung und Signalverzögerung durch LC-Glieder, Abschlusswiderstand und Signallaufzeit für Koaxialkabel, Mehrfachreflexionen und Reflexionskoeffizient für Signalreflexionen an Koaxialkabeln.

Literatur:

- /1/ PORTIS, A. M., YOUNG, H. D.: „Physik im Experiment“, Berkeley Physik Kurs Band 6, Vieweg & Sohn, Braunschweig
- /2/ ALONSO, M., FINN, E. J.: „Physics“, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.)
- /3/ FEYNMAN, R. P.: „Lectures on Physics Vol. 2“, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.)

1 Einleitung

In der experimentellen Physik werden oft Messwertaufnehmer eingesetzt, die den Betrag einer zu messenden Größe in ein dazu proportionales elektrisches Signal umwandeln. Dieses Signal muss mithilfe geeigneter Kabel weitergeleitet werden, ehe es z. B. auf einem Oszilloskop dargestellt oder in einen Rechner eingelesen werden kann. Bei dieser Signalübertragung muss im Idealfall gewährleistet sein, dass das Signal längs der Übertragungsstrecke nicht gedämpft und weder durch die Eigenschaften des Kabels verzerrt, noch durch äußere elektromagnetische Störfelder beeinflusst wird. Diesen Ansprüchen wird kein reales Kabel gerecht. Wir werden jedoch sehen, dass Koaxialkabel, die wir uns als unendliche Folge winziger Glieder aus Spulen und Kondensatoren (LC-Glieder) vorstellen können, diesem Ideal schon recht nahe kommen.

Bei der Erarbeitung der recht umfangreichen Theorie für diesen Versuch sollte zunächst das Ziel sein, einen Überblick über die dargestellten Zusammenhänge zu bekommen. Zur Hilfestellung sind die wichtigsten Resultate (Gleichungen) jeweils umrahmt. Bei einem zweiten Durchgang sollten dann die wesentlichen Schritte zur Herleitung von Gleichungen nachvollzogen werden, soweit diese Schritte im Skript angegeben sind.

2 Theorie

Jede elektrische (Kabel)-Verbindung zwischen zwei Geräten A und B (Abb. 1 links) können wir uns ersetzt denken durch einen zwischen den Geräten liegenden ohmschen Widerstand R , eine zu R in Reihe liegende Spule L , einen zwischen den Leitungen liegenden Kondensator C und einen ebenfalls zwischen den Leitungen liegenden Widerstand, für den üblicherweise der Leitwert G (Kehrwert des Widerstandes) angegeben wird (Abb. 1 Mitte).

Hinweis:

Wie schon bei früheren Versuchen werden wir aus Gründen der Vereinfachung der Schreibweise die Bezeichnungen C , L , R und G sowohl für die elektronischen Bauteile Kondensator, Spule und Widerstand, als auch für die Größen Kapazität, Induktivität, Widerstandswert und Leitwert verwenden.

Aus der Untersuchung des Resonanzverhaltens des elektromagnetischen Schwingkreises ist bekannt, dass L und C zusammen das *Frequenzverhalten* der Übertragungsstrecke von A nach B bestimmen. Der ohmsche Widerstand R bewirkt nur eine *Dämpfung* des von A nach B zu übertragenden Signals. Da eine bloße Dämpfung mit einem geeigneten Verstärker leicht wieder kompensiert werden kann, können wir den Widerstand R für die folgenden Betrachtungen unberücksichtigt lassen. Ebenso lassen wir Verluste unberücksichtigt, die durch einen nicht verschwindenden Leitwert G zwischen den Leitungen entstehen. Wir beschränken uns also auf *verlustfreie* Kabel mit $R \rightarrow 0$ und $G \rightarrow 0$, deren Ersatzschaltbild nur noch die Spule L und den Kondensator C enthält (Abb. 1 rechts).

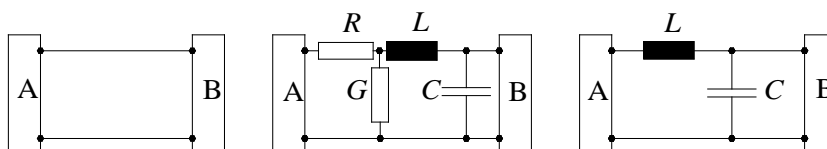


Abb. 1: Ersatzschaltbilder für Übertragungsstrecken.

Bei der folgenden Darstellung werden wir nicht alle benutzten Gleichungen vollständig herleiten. Wir verweisen hier vielmehr auf die angegebene Literatur. So findet man in /1/ eine umfassende Beschreibung der LC -Ketten mit ausführlicher und sehr anschaulicher Darstellung des mechanischen Analogons, nämlich einer periodischen Anordnung von Massen ($\rightarrow L$) und Federn ($\rightarrow C$). In /2/ kann man die nötigen Grundlagen zur mathematisch-physikalischen Beschreibung von Wellenbewegungen und den zugehörigen Differentialgleichungen (Wellengleichungen) nachlesen. In /3/ findet sich einiges zum Koaxialkabel. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf die Skizzierung des jeweiligen Lösungsansatzes und geben die daraus ableitbaren Ergebnisse an, die für die Versuchsdurchführung erforderlich sind.

2.1 Die Differentialgleichung der LC -Kette

Wir betrachten zunächst gem. Abb. 2 eine lange periodische Anordnung von diskreten LC -Gliedern, eine sogenannte LC -Kette. Uns interessieren die Verhältnisse am n -ten Glied mit seinem linken ($n-1$) und rechten Nachbarn ($n+1$). Die entsprechenden Kondensatoren tragen die Ladungen Q_{n-1} , Q_n und Q_{n+1} . Über ihnen liegen die Spannungen U_{n-1} , U_n und U_{n+1} . Durch die zugehörigen Spulen fließen die Ströme I_{n-1} , I_n und I_{n+1} .

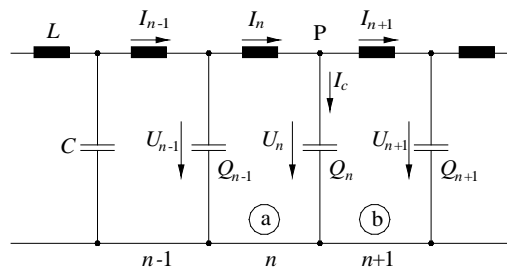


Abb. 2: Ausschnitt aus einer LC -Kette.

Nach der Maschenregel gilt für die Spannungen in Masche a:

$$(1) \quad U_{n-1} - L \frac{dI_n}{dt} - U_n = 0$$

und für die Spannungen in Masche b:

$$(2) \quad U_n - L \frac{dI_{n+1}}{dt} - U_{n+1} = 0$$

Unser Ziel ist, eine Differentialgleichung (DGL) für den *Spannungsverlauf* in der LC -Kette zu erhalten. Wir müssen daher aus Gl. (1) und (2) den Strom eliminieren.

Nach der Knotenregel gilt am n -ten Glied (Punkt P):

$$(3) \quad I_n = I_{n+1} + I_C = I_{n+1} + \frac{dQ_n}{dt} = I_{n+1} + C \frac{dU_n}{dt}$$

Wir bilden die zeitliche Ableitung von Gl. (3), ersetzen darin dI_{n+1}/dt durch den sich aus Gl. (2) ergebenden Ausdruck und setzen das Ergebnis in Gl. (1) ein. Dann erhalten wir folgende DGL für den Spannungsverlauf in der LC -Kette:

$$(4) \quad \boxed{\frac{d^2 U_n}{dt^2} = \frac{1}{LC} (U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1})} \quad \text{DGL für den Spannungsverlauf in der } LC\text{-Kette}$$

2.2 Die Differentialgleichung einer homogenen Leitung

Wir betrachten nun gem. Abb. 3 anstelle einer periodischen Anordnung diskreter LC -Glieder eine Leitung, bei der die Induktivität und Kapazität homogen über die gesamte Leitung verteilt ist. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

C_0 : Kapazität der Leitung pro Längeneinheit; $[C_0] = \text{F/m}$

L_0 : Induktivität der Leitung pro Längeneinheit; $[L_0] = \text{H/m}$

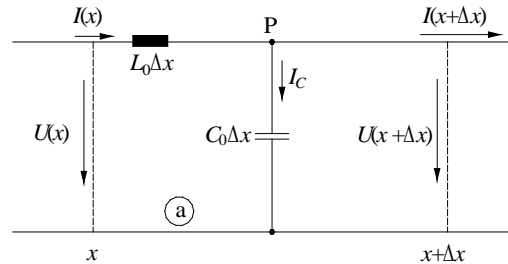


Abb. 3: Ausschnitt aus einem Koaxialkabel.

Wir können in diesem Fall keine Aussage mehr machen über die Verhältnisse an einem bestimmten LC -Glied (weil es solche Glieder hier nicht gibt), sondern nur noch über die Verhältnisse an einem bestimmten Ort x der Leitung im Vergleich zu einem Nachbarort $x + \Delta x$. Zwischen beiden Orten liegen die Induktivität $L_0\Delta x$ und die Kapazität $C_0\Delta x$. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 3 gilt nach der Maschenregel für Masche a (äquivalent zu Gl. (1))¹:

$$(5) \quad U(x) - L_0\Delta x \frac{\partial I(x)}{\partial t} - U(x + \Delta x) = 0$$

Wir setzen in Gl. (5)

$$(6) \quad \Delta U = U(x + \Delta x) - U(x)$$

teilen durch Δx und machen den Grenzübergang für $\Delta x \rightarrow 0$. Dann folgt:

$$(7) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}$$

Eine räumliche Spannungsänderung ($\partial U / \partial x$) ist also mit einer zeitlichen Stromänderung ($\partial I / \partial t$) verbunden.

Nach der Knotenregel gilt für den Punkt P:

$$(8) \quad I(x) = I(x + \Delta x) + I_C$$

Der Strom I_C führt während der Zeit ∂t zu einer Ladungsänderung ∂Q am Kondensator:

$$(9) \quad \partial Q = I_C \partial t$$

Diese Ladungsänderung ist mit einer Spannungsänderung ∂U über dem Kondensator verbunden, für die gilt $\partial U = \partial Q / (C_0\Delta x)$, also:

$$(10) \quad \partial U = \frac{I_C}{C_0\Delta x} \partial t$$

Entsprechend der Nomenklatur aus Gl. (6) setzen wir:

¹ Da bei der homogenen Leitung U und I vom Ort x und der Zeit t abhängen, muss bei der Differentiation nach der Zeit die partielle Ableitung verwendet werden.

$$(11) \quad \Delta I = I(x + \Delta x) - I(x)$$

Damit folgt aus Gl. (8):

$$(12) \quad \Delta I = -I_c$$

Setzen wir Gl. (12) in Gl. (10) ein und machen wieder den Grenzübergang für $\Delta x \rightarrow 0$, so erhalten wir:

$$(13) \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}$$

Eine räumliche Stromänderung ($\partial I / \partial x$) ist also mit einer zeitlichen Spannungsänderung ($\partial U / \partial t$) verbunden.

Wir wollen die Gleichungen (7) und (13) nun so umformen, dass sie nur noch jeweils eine veränderliche Größe enthalten, also entweder U oder I . Dazu leiten wir Gl. (7) nach dem Ort und Gl. (13) nach der Zeit ab und eliminieren aus beiden I . Damit erhalten wir folgende Differentialgleichung für den Spannungsverlauf in einer homogenen Leitung:

$$(14) \quad \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}} \quad \text{DGL für den Spannungsverlauf in der homogenen Leitung}$$

Für den Stromverlauf folgt analog:

$$(15) \quad \boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}} \quad \text{DGL für den Stromverlauf in der homogenen Leitung}$$

Die Gleichungen (14) und (15) stellen jeweils eindimensionale *Wellengleichungen* dar, die so heißen, weil ihre *Lösungen* Funktionen sind, die *Wellen* beschreiben. Das charakteristische Merkmal einer Wellengleichung besteht darin, dass sie die zweite zeitliche Ableitung einer Größe mit der zweiten räumlichen Ableitung derselben Größe verknüpft.

2.3 Lösung der Differentialgleichung für die homogene Leitung

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (14) hat die Form (c ist die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* der Welle):

$$(16) \quad U(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

wobei f_1 und f_2 *beliebige* Funktionen sind. Die Lösung setzt sich aus einer in $+x$ -Richtung laufenden *Spannungswelle*

$$(17) \quad U_+(x, t) = f_1(x - ct)$$

und einer in $-x$ -Richtung laufenden *Spannungswelle*

$$(18) \quad U_-(x, t) = f_2(x + ct)$$

zusammen.

Analog gilt für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (15):

$$(19) \quad I(x, t) = g_1(x - ct) + g_2(x + ct)$$

wobei auch hier g_1 und g_2 beliebige Funktionen sind. Für die in $+x$ -Richtung laufende *Stromwelle* gilt:

$$(20) \quad I_+(x, t) = g_1(x - ct)$$

und für die in $-x$ -Richtung laufende *Stromwelle*:

$$(21) \quad I_-(x, t) = g_2(x + ct)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten c dieser Wellen sind betragsmäßig gleich und durch den „Proportionalitätsfaktor“ der Wellengleichung gegeben:

$$(22) \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Gl. (22) zeigt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit c für eine Spannungs- oder Stromwelle auf einer homogenen Leitung nur durch die Leitungskonstanten L_0 und C_0 gegeben ist; insbesondere ist c *nicht frequenzabhängig*.² Eine solche Leitung heißt *dispersionsfrei*.

Dies hat eine große physikalische Bedeutung, die wir uns durch folgende Überlegung klar machen wollen:

Nach dem *FOURIER-Theorem* können wir jedes periodische Signal S , also auch jede Spannungswelle der Form (17) oder (18) in eine unendliche Summe *sinusförmiger Wellen* $s(\omega)$ mit unterschiedlichen Kreisfrequenzen ω , Amplituden und Phasenlagen zerlegen. Für die Analyse der Übertragung eines Signals S von A nach B über eine Leitung können wir daher folgendermaßen vorgehen: wir denken uns das Signal S am Anfang der Leitung zunächst in die entsprechenden sinusförmigen Wellen $s(\omega)$ (*FOURIER-Komponenten* oder *Spektralkomponenten*) zerlegt:

$$(23) \quad \text{Leitungsanfang:} \quad S = \sum s(\omega)$$

Anschließend untersuchen wir, wie diese sinusförmigen Wellen $s(\omega)$ von der Leitung übertragen werden. Dabei betrachten wir den idealisierten *Spezialfall*, dass alle sinusförmigen Wellen unabhängig von ihrer Frequenz *ohne Dämpfung* und mit *gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit* c übertragen werden. Dann ergibt die Wiederaufsummation der sinusförmigen Wellen am Ende der Leitung, $s(\omega)$, wieder das gleiche Signal S , das auch am Anfang der Leitung vorlag:

$$(24) \quad \text{Leitungsende:} \quad \sum s_i(\omega) = S$$

Die Bedingungen Dämpfung $\rightarrow 0$ und $c = \text{const.}$ sind für die oben betrachtete, idealisierte homogene Leitung erfüllt, denn wir hatten angenommen $R \rightarrow 0$ und gefunden $c = \text{const.}$ (Gl. (22)). Eine solche Leitung ist also (im Idealfall) in der Lage, beliebig geformte Signale *verlust- und verzerrungsfrei* zu übertragen.

2.3.1 Wellenwiderstand der homogenen Leitung

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen Strom- und Spannungsverlauf in einer homogenen Leitung untersuchen. Gem. Gl. (7) gilt für die nach rechts laufende Spannungs- und Stromwelle der Zusammenhang:

$$(25) \quad \frac{\partial U_+}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I_+}{\partial t}$$

und für die nach links laufende Welle:

$$(26) \quad \frac{\partial U_-}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I_-}{\partial t}$$

Die vier in diesen Gleichungen auftretenden partiellen Ableitungen von U_+ , U_- , I_+ und I_- nach dem Ort bzw. der Zeit finden wir durch Anwendung der Kettenregel auf die Gleichungen (17), (18), (20) und (21). Leiten wir beispielsweise Gl. (17) nach der Zeit ab, so erhalten wir:

² Gemäß Gl. (40) hängt C_0 und damit auch c von ϵ_r ab, das seinerseits leicht frequenzabhängig ist. Analoges gilt für L_0 , c und μ_r . Koaxialkabel sind deshalb *nicht vollkommen frei* von Dispersion. Die Frequenzabhängigkeit ist jedoch so schwach, dass wir sie für unsere Überlegungen vernachlässigen können.

$$(27) \quad \frac{\partial U_+(x,t)}{\partial t} = f_1'(x-ct) \cdot (-c) = U_+'(x,t) \cdot (-c) := U_+' \cdot (-c)$$

wobei der Strich (') die äußere Ableitung bedeutet. Analog finden wir die anderen Ableitungen, die wir in die Gleichungen (25) und (26) einsetzen. Wir erhalten dann:

$$(28) \quad U_+' = -L_0 \cdot (-c) I_+'$$

$$(29) \quad U_-' = -L_0 c I_-'$$

Wir integrieren nun beide Gleichungen und erhalten:

$$(30) \quad \frac{U_+}{I_+} = L_0 c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

$$(31) \quad \frac{U_-}{I_-} = -L_0 c = -\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

Diese Gleichungen stellen analog zum OHMschen Gesetz $R = U/I$ den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom in einer homogenen Leitung dar. Die Proportionalitätskonstante

$$(32) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

heißt *Wellenwiderstand*. Dieser Wellenwiderstand hat zwar auch die Einheit OHM, ist physikalisch jedoch etwas ganz anderes als ein ohmscher Widerstand, da an ihm keine Energieverluste in Form von Wärmeerzeugung auftreten. Seine physikalische Bedeutung werden wir im nächsten Kapitel kennenlernen.

2.3.2 Signalreflexionen am Ende einer homogenen Leitung

Wir betrachten gem. Abb. 4 eine homogene Leitung, an der am rechten Ende ein Verbraucher angeschlossen ist, den wir durch seinen ohmschen Widerstand R (Innenwiderstand) symbolisieren wollen. Uns interessiert insbesondere, wann und wie eine nach rechts laufende Spannungswelle an dem Verbraucher reflektiert wird. (Zur Veranschaulichung der Reflexion hilft wieder die Analogie zum mechanischen Fall, s. /1/.)

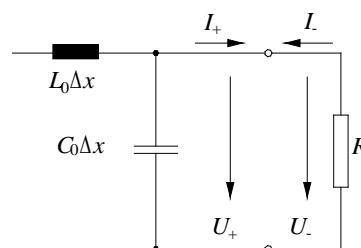


Abb. 4: Ersatzschaltbild für das Ende einer homogenen Leitung mit Abschlusswiderstand R .

Wir bezeichnen gem. Gl. (17) die nach rechts laufende Welle mit U_+ und die reflektierte, nach links laufende Welle gem. Gl. (18) mit U_- . Den *Reflexionskoeffizienten* definieren wir wie folgt:

$$(33) \quad \rho = \frac{U_-}{U_+}$$

Wir wollen nun ρ berechnen. Dazu schreiben wir zunächst die Gesamtspannung U und den Gesamtstrom I an einem beliebigen Punkt der Leitung hin. Es gilt:

$$(34) \quad I = I_+ + I_-$$

$$(35) \quad U = U_+ + U_-$$

Diese Beziehungen müssen aus Gründen der Kontinuität auch am Ort des Verbrauchers gelten, sodass aus dem ohmschen Gesetz $U = RI$ mit den Gleichungen (34) und (35) folgt:

$$(36) \quad U_+ + U_- = RI_+ + RI_-$$

Wir benutzen nun die Gleichungen (30), (31) und (32) in der Form

$$(37) \quad \frac{U_+}{I_+} = Z_0 \qquad \frac{U_-}{I_-} = -Z_0$$

um aus Gl. (36) die Ströme zu eliminieren. Dann folgt:

$$(38) \quad U_+ + U_- = \frac{R}{Z_0}U_+ - \frac{R}{Z_0}U_-$$

Hieraus folgt schließlich für den Reflexionskoeffizienten:

$$(39) \quad \boxed{\rho = \frac{R - Z_0}{R + Z_0}}$$

Je nach Wahl des ohmschen Widerstandes R im Vergleich zum Wellenwiderstand Z_0 kann der Reflexionskoeffizient Werte zwischen -1 und +1 annehmen. Von besonderem Interesse sind folgende Fälle:

$R \rightarrow 0:$	$\rho \rightarrow -1;$	die Welle wird mit <i>umgekehrtem Vorzeichen</i> vollständig reflektiert.
$R \rightarrow \infty:$	$\rho \rightarrow +1;$	die Welle wird mit <i>gleichem Vorzeichen</i> vollständig reflektiert.
$R = Z_0:$	$\rho = 0;$	es findet <i>keine Reflexion</i> statt, die Energie der Welle wird vollständig auf den Verbraucher übertragen. Dies ist der Idealfall einer „ <i>richtig abgeschlossenen</i> “ Leitung mit dem <i>Abschlusswiderstand</i> $R_A = Z_0$.

Insbesondere der reflexionsfreie Fall für $R = Z_0$ hat große praktische Bedeutung. Ein Beispiel aus dem Alltag soll dies verdeutlichen. Häusliche Antennenkabel sind Koaxialkabel mit einem Wellenwiderstand von $Z_0 = 75 \Omega$. Werden an ein solches Kabel in einer Wohnung mehrere Antennendosen angeschlossen, so muss darauf geachtet werden, dass das Kabel an der letzten Antennendose mit einem Widerstand von $R = 75 \Omega$ abgeschlossen wird. Dadurch werden Signalreflexionen am Kabelende verhindert, die andernfalls z. B. die Qualität von Fernsehbildern erheblich beeinträchtigen könnten.

2.3.3 Koaxialkabel

Für die Signalübertragung im Hochfrequenzbereich (HF-Bereich) werden heutzutage vielfach Koaxialkabel verwendet. Sie stellen eine spezielle Form der homogenen Leitung dar. Koaxialkabel bestehen gem. Abb. 5 aus einem inneren Draht D mit dem Durchmesser d_i , der von einem dünnen äußeren geflochtenen Metallmantel M mit dem Durchmesser d_a umgeben ist. Zwischen Draht und Mantel befindet sich ein flexibles Isolationsmaterial I mit der *relativen Permittivität* ϵ_r und der *relativen Permeabilität* μ_r . Um den Metallmantel herum liegt ein äußerer Isolationsmantel K aus flexiblem Kunststoff.

Neben der geforderten homogenen Verteilung der Induktivität und Kapazität auf dem Kabel hat eine solche Anordnung zwei weitere entscheidende Vorteile: (i) Der äußere Metallmantel wirkt als FARADAY-Käfig und sorgt so für eine Abschirmung des inneren signalführenden Drahtes gegen äußere elektrische Störfelder. (ii) Da der Metallmantel des Koaxialkabels gleichzeitig als Rückleiter für das Signal benutzt wird, ist auch für eine magnetische Abschirmung nach außen gesorgt, denn die Induktionswirkungen durch die Signalausbreitung auf dem inneren Draht und dem äußeren Metallmantel heben sich gegenseitig auf.

Wir wollen nun die Signalausbreitungsgeschwindigkeit auf Koaxialkabeln und den Wellenwiderstand solcher Kabel berechnen. Dazu benötigen wir die Induktivität und Kapazität des Kabels pro Längeneinheit. Für die Kapazität pro Längeneinheit gilt (Analogie zum Zylinderkondensator):



Abb. 5: Koaxialkabel. *Links*: Querschnitt, *rechts*: Seitenansicht. K: Kunststoffmantel, M: äußerer Metallmantel (Drahtgeflecht) mit Durchmesser d_a , I: Isolationsmaterial, D: Innenleiter mit Durchmesser d_i (Draht oder Litze).

$$(40) \quad C_0 = 2\pi\epsilon_r\epsilon_0 \frac{1}{\ln\left(\frac{d_a}{d_i}\right)}$$

wobei ϵ_0 die *elektrische Feldkonstante (Permittivität des Vakuums)* ist. Für die Induktivität pro Längeneinheit findet man:

$$(41) \quad L_0 = \frac{1}{2\pi} \mu_r \mu_0 \ln\left(\frac{d_a}{d_i}\right)$$

wobei μ_0 die *magnetische Feldkonstante (Permeabilität des Vakuums)* ist.

Für die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* von Signalen auf dem Koaxialkabel ergibt sich damit gem. Gl. (22):

$$(42) \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

wobei $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ die *Vakuum-Lichtgeschwindigkeit* ist. Im Koaxialkabel ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Wellen demnach um den Faktor $1/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ kleiner als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0 . Aus Gl. (42) folgt ferner, dass c lediglich durch die Eigenschaften des Isolationsmaterials (ϵ_r , μ_r), nicht jedoch durch die Kabelgeometrie bestimmt wird.

Für den *Wellenwiderstand* erhalten wir gem. Gl. (32):

$$(43) \quad Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{d_a}{d_i}\right)$$

Im Gegensatz zur Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt der Wellenwiderstand des Koaxialkabels also sowohl von den Materialeigenschaften (ϵ_r , μ_r), als auch von der Kabelgeometrie (d_a , d_i) ab.

Die gebräuchlichsten Koaxialkabel haben Wellenwiderstände von 50Ω oder 75Ω , weniger gebräuchliche bis zu 300Ω . Die so genannten „ 50Ω -Kabel“ sind im Laborbetrieb weit verbreitet, wogegen die „ 75Ω -Kabel“ in der Fernsehtechnik üblich sind, z. B. als Antennenkabel und für die Übertragung von Videosignalen.

2.4 Lösung der Differentialgleichung für die LC-Kette

In Analogie zu den Überlegungen bei der homogenen Leitung lässt sich auch die Differentialgleichung (4) für die LC-Kette lösen. Wir wollen auf die Darstellung des Lösungsweges jedoch verzichten und nur einige Größen angeben, die sich aus der Lösung ergeben und die für die Signalausbreitung auf LC-Ketten besonders wichtig sind.

2.4.1 Signallaufzeit und Dispersionsrelation

Anstelle der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen auf LC -Ketten ist es sinnvoller, die Signallaufzeit τ (Verzögerungszeit) pro Kettenglied für sinusförmige Signale mit der Kreisfrequenz ω anzugeben. Aus der Lösung der DGL ergibt sich:

$$(44) \quad \tau = \frac{2}{\omega} \arcsin \frac{\omega \sqrt{LC}}{2}$$

Gl. (44) stellt die wichtige *Dispersionsrelation* für die Ausbreitung von sinusförmigen Signalen auf LC -Ketten dar. Sie besagt, dass die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* der Signale, hier ausgedrückt über die *Signallaufzeit* τ pro Kettenglied, *frequenzabhängig* ist. Hier liegt ein wesentlicher Unterschied zur (idealen) homogenen Leitung vor, bei der die Ausbreitungsgeschwindigkeit frequenzunabhängig war (Gl. (22)).

Im Sinne der bei der homogenen Leitung angestellten Überlegungen zur Signalübertragung auf LC -Ketten können wir demnach festhalten, dass Signale, die FOURIER-Komponenten unterschiedlicher Frequenzen enthalten, bei der Übertragung über LC -Ketten verzerrt werden. Schreiben wir nämlich wieder gem. Gl. (23) für das Signal S am Anfang der Leitung

$$(45) \quad \text{Leitungsanfang:} \quad S = \sum s(\omega)$$

so müssen wir nun berücksichtigen, dass sich die Phasenlage der FOURIER-Komponenten $s_l(\omega)$ am Ende der Leitung infolge der frequenzabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit verändert hat. Die Addition der einzelnen Komponenten (vgl. Gl. (23)) ergibt am Leitungsende also *nicht* mehr das gleiche Signal S :

$$(46) \quad \text{Leitungsende:} \quad \sum s_l(\omega) \neq S$$

2.4.2 Abbruchfrequenz

Neben der Dispersion führt noch ein weiterer Effekt zur Signalverzerrung. Schreiben wir Gl. (44) in der Form:

$$(47) \quad \omega = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{\omega \tau}{2}$$

so sehen wir, dass der maximale Wert für ω dann erreicht ist, wenn der Sinus in Gl. (47) seinen Maximalwert 1 annimmt, wenn also gilt:

$$(48) \quad \sin \frac{\omega \tau}{2} = \frac{\omega \sqrt{LC}}{2} = 1$$

Die zugehörige maximale Kreisfrequenz heißt *Abbruchfrequenz* ω_a :

$$(49) \quad \omega_a = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

Die LC -Kette kann nur sinusförmige Signale bis zu dieser Maximalfrequenz übertragen. Enthält ein zu übertragendes Signal S FOURIER-Komponenten mit $\omega > \omega_a$, so werden diese Komponenten *gar nicht übertragen*, was neben der Dispersion zu einer zusätzlichen Signalverzerrung führt.

Für kleine Signalfrequenzen ($\omega \ll \omega_a$) ergibt sich eine annähernd konstante *Signallaufzeit* (*Verzögerungszeit*) pro Kettenglied:

$$(50) \quad \tau = \sqrt{LC} \quad \text{für } \omega \ll \omega_a$$

In diesem Fall liegt also keine Dispersion mehr vor; Signale mit FOURIER-Komponenten in diesem Frequenzbereich werden von der LC -Kette nahezu verzerrungsfrei übertragen.

Für den Grenzfall $\omega \rightarrow \omega_a$ ergibt sich für die Signallaufzeit

$$(51) \quad \tau_a = \frac{\pi}{2} \sqrt{LC} \quad \text{für } \omega = \omega_a$$

2.4.3 Wellenwiderstand der LC -Kette

Für den Wellenwiderstand Z_0 der LC -Kette findet man durch Anwendung der KIRCHHOFFSchen Gesetze nach einiger Rechnung:

$$(52) \quad Z_0(\omega) = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1 - \omega^2 \frac{LC}{4}}}$$

Er ist also im Gegensatz zum Wellenwiderstand der homogenen Leitung *frequenzabhängig*. Allerdings wirkt sich diese Frequenzabhängigkeit erst bei hohen Frequenzen aus. Für *kleine* Frequenzen $\omega \ll \omega_a$ gilt:

$$(53) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \text{const.} \quad \text{für } \omega \ll \omega_a$$

Die LC -Kette verhält sich dann bezüglich des Wellenwiderstandes wie eine homogene Leitung. Für $\omega = \omega_a$ wird der Wellenwiderstand unendlich und für $\omega > \omega_a$ imaginär.

2.4.4 Signalreflexionen auf einer LC -Kette

Für den Reflexionskoeffizienten einer an ihrem Ende mit dem ohmschen Widerstand R abgeschlossenen LC -Kette findet man den gleichen Ausdruck wie im Falle der homogenen Leitung, also

$$(39) \quad \rho = \frac{R - Z_0}{R + Z_0}$$

Allerdings ist der Abschlusswiderstand R_A , bei dem keine Reflexion auftritt, in diesem Fall frequenzabhängig, da Z_0 frequenzabhängig ist (Gl. (52)). Für ein Signal, das FOURIER-Komponenten mehrerer Frequenzen enthält, ist ein *vollkommen reflexionsfreier Abschluss* einer LC -Kette also nicht möglich.

Im Falle *kleiner* Frequenzen $\omega \ll \omega_a$ wird Z_0 (Gl. (53)) und damit auch R_A frequenzunabhängig.

3 Versuchsdurchführung

Zubehör:

Funktionsgenerator AGILENT 33120A / 33220A, Digital-Speicheroszilloskop TDS 1012 / 1012B / 2012C / TBS 1102B, Multimeter, LC -Ketten (viermal fünf Glieder mit $L = 1$ mH, $C = 1$ nF; einmal fünf Glieder mit $L = 1$ mH, $C = 100$ nF, Toleranzen gem. Aufdruck), Operationsverstärker mit Netzgerät (Phywe (0 - 15) / (0 - 30) V), Steckwiderstände, Steckkondensatoren, Steckbrücken, Kapazitätsdekade, 2 Widerstandsdekaden, lange Koaxialkabel (10 m, 50 m mit je $Z_0 = 50 \Omega$)

Hinweise:

Es ist sinnvoll, bei allen Versuchsschritten das Oszilloskop mit dem Signal des Funktionsgenerators extern zu triggern.

3.1 LC -Ketten

3.1.1 Signalverzerrung durch LC -Glieder

Wir wollen uns zunächst einen Eindruck über die Signalverzerrung durch unterschiedlich dimensionierte LC -Glieder verschaffen. Signalverzerrungen lassen sich am besten über die Verformung von sehr kurzen

Impulsen mit steilen Impulsflanken messen. Zur Erzeugung solcher Impulse und der Messung ihrer Verzerrungen durch LC -Glieder bauen wir eine Schaltung gem. Abb. 6 auf.

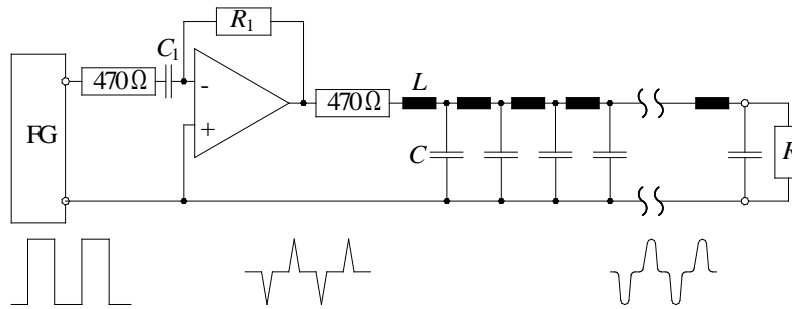


Abb. 6: Versuchsaufbau zur Messung mit LC -Ketten (Betriebsspannung des OP nicht mitgezeichnet). Unten sind schematisch die Spannungsverläufe an den entsprechenden Stellen in der Schaltung gezeigt. Die beiden $470\ \Omega$ -Widerstände dienen der Signalanpassung.

Der Funktionsgenerator FG liefert eine *Rechteckspannung* mit einer Frequenz von $f \approx 1\ \text{kHz}$ und einer Amplitude von ca. 5 V. Diese Rechteckspannung bildet das Eingangssignal für einen als (invertierenden) Differentiator geschalteten Operationsverstärker ($C_1 = 4,7\ \text{nF}$, $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$). Der zwischen FG und C_1 in Reihe liegende Widerstand von $470\ \Omega$ dient der Signalanpassung. Durch die Differentiation des Rechtecksignals entstehen am Ausgang des OP kurze Impulse, die etwa die in Abb. 7 gezeigte Form haben.

Für die folgenden Versuchsschritte werden jeweils die *positiven* Ausgangsimpulse genutzt, das Oszilloskop wird also auf die *fallende* Flanke des Rechtecksignals getriggert. Aufgrund der nicht idealen Eigenschaften des Funktionsgenerators und des Differentiators weichen die realen Ausgangsimpulse von der idealen Form ab, die man mathematisch bei Differentiation eines Rechtecksignals erwarten würde (δ -Impulse). Es werden daher zunächst zwei wichtige Parameter dieser Impulse ohne angeschlossene LC -Kette mithilfe des Oszilloskops vermessen, nämlich ihre *Anstiegszeit* und ihre *Abfallzeit*. Die *Anstiegszeit* (*rise-time*) τ_r ist die Zeit, die ein Impuls benötigt, um von 10 % auf 90 % seiner maximalen Amplitude anzusteigen. Die *Abfallzeit* (*fall-time*) τ_f ist die Zeit, in der der Impuls von 90 % auf 10 % seiner maximalen Amplitude abfällt (s. Abb. 8).

Zusätzlich zur Vermessung von τ_r und τ_f wird die Impulsform mithilfe eines Bildschirmfotos gespeichert.

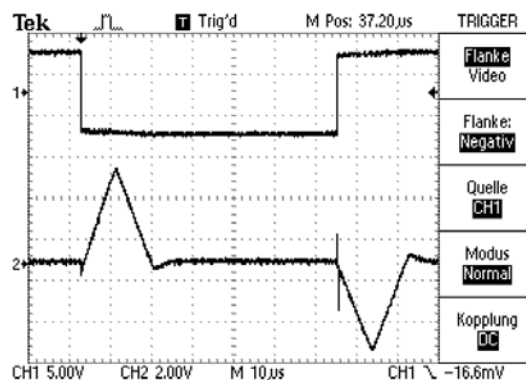


Abb. 7: Oben: Rechtecksignal am Eingang eines OP-Differentiators (hier $f \approx 7\ \text{kHz}$; im Versuch wird mit $f \approx 1\ \text{kHz}$ gearbeitet). Unten: Ausgangssignal des invertierenden OP-Differentiators.

Anschließend werden gem. Abb. 6 nacheinander zwei verschiedene LC -Ketten an den Ausgang des OP angeschlossen, und zwar

- 5 Glieder mit je $L = 1\ \text{mH}$, $C = 1\ \text{nF}$ und
- 5 Glieder mit je $L = 1\ \text{mH}$, $C = 100\ \text{nF}$.

Der zwischen dem OP und der LC -Kette liegende Widerstand von $470\ \Omega$ dient ebenfalls der Signalanpassung.

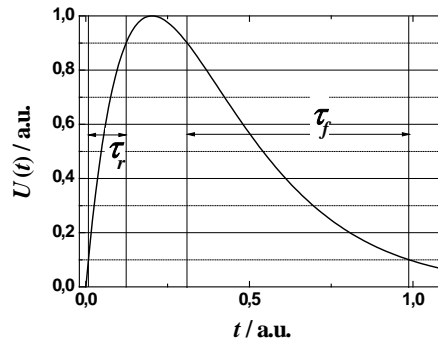


Abb. 8: Zur Definition der Anstiegszeit τ_r und der Abfallzeit τ_f eines Spannungsimpulses $U(t)$.

Das letzte Kettenglied wird zunächst mit einem Widerstand $R = 1 \text{ M}\Omega$ (Widerstandsdekade) abgeschlossen. Auf dem Oszilloskop werden gleichzeitig die Ausgangsspannung des OP vor dem $470 \text{ }\Omega$ -Widerstand und die Spannung über R beobachtet. R wird nun so eingestellt, dass das Signal über R im Vergleich zum Ausgangssignal des OP so wenig verzerrt wie möglich aussieht (reflexionsarmer Fall).

Für beide LC-Ketten werden anschließend die Anstiegs- und Abfallzeiten des Signals über R vermessen und der Impulsverlauf mithilfe eines Bildschirmfotos gespeichert. Bei Impulsen, die nach dem ersten Abfall über die Grundlinie schwingen, wird die Abfallzeit an der ersten fallenden Impulsflanke gemessen.

Frage 1:

- Wie lassen sich die Signalverzerrungen am Ende der Ketten im Vergleich zum OP-Signal erklären?
- Warum überträgt die LC-Kette a das Signal mit weniger Verzerrungen?

3.1.2 Verzögerungszeit eines LC-Kettengliedes

Es wird wieder ein Aufbau gem. Abb. 6 benutzt. Es werden zunächst 5 Glieder vom Typ b und in einer zweiten Messung 20 Glieder vom Typ a an den Ausgang des OP gelegt. Zwischen dem OP und der LC-Kette liegt zur Signalanpassung wieder ein Widerstand von $470 \text{ }\Omega$. R wird erneut auf den reflexionsarmen Fall eingestellt (Ergebnisse aus Kap. 3.1.1 benutzen). Die verbleibenden Signalverzerrungen werden ignoriert. Die Zeitverzögerung zwischen dem Ausgangsimpuls des OP und dem Impuls am Ausgang der Ketten wird gemessen und daraus die Verzögerungszeit τ pro Kettenglied berechnet. Die Ergebnisse werden mit den theoretisch erwarteten Werten für $\omega \ll \omega_a$ und $\omega = \omega_a$ (Gl. (50) und (51) als Grenzwerte von Gl. (44)) verglichen.

3.2 Koaxialkabel

Ein im Labor häufig verwendetes Koaxialkabel ist das „ $50 \text{ }\Omega$ -Kabel“ vom Typ RG 58 C/U. Es hat folgende typische Kenndaten gemäß Datenblatt (Toleranzen ca. 2 %, wenn nicht anders angegeben):

$$\begin{aligned} C_0 &= 101 \text{ pF/m} \\ L_0 &= 253 \text{ nH/m} \\ Z_0 &= (50 \pm 2) \text{ }\Omega \end{aligned}$$

Innenleiter:	verzinnte Cu-Litze, $19 \times 0,18 \text{ mm } \varnothing$; Gesamtdurchmesser $0,9 \text{ mm}$
Außenleiter:	verzinntes Cu-Geflecht, $16 \times 7 \times 0,127 \text{ mm}$
Innenisolation:	Polyäthylen (PE), Durchmesser (außen) $2,92 \text{ mm}$, $\epsilon_r \approx 2,3$ (bei 1 MHz); $\mu_r \approx 1$
Außenisolation:	Polyvinylchlorid (PVC), Durchmesser (außen) $4,95 \text{ mm}$

Wir waren bei der theoretischen Beschreibung der homogenen Leitung davon ausgegangen, dass ohmsche Verluste in der Leitung keine Rolle spielen. Dies ist bei den üblichen Koaxialkabeln im Frequenzbereich unterhalb von ca. 1 MHz auch tatsächlich der Fall. Zu höheren Frequenzen hin macht sich allerdings eine Signaldämpfung mit zunehmender Kabellänge bemerkbar. Der Vollständigkeit halber (im Praktikum messen wir mit Frequenzen unterhalb 1 MHz und kurzen Kabeln) seien einige typische Dämpfungsfaktoren D angegeben:

Tab. 1: Dämpfungsfaktoren $D = U_a/U_e$ für ein Koaxialkabel vom Typ RG 58 C/U. (U_a Ausgangsspannung, U_e Eingangsspannung; nach Datenblatt des Kabeltyps BELDEN MIL-C-17F.)

Frequenz / MHz	1	10	100	400	1000
D pro 100 m Kabel	0,85	0,59	0,16	$0,13 \cdot 10^{-1}$	$0,30 \cdot 10^{-3}$

3.2.1 Abschlusswiderstand

Mit einem Aufbau gem. Abb. 9 soll zunächst untersucht werden, bei welchem Abschlusswiderstand am *Anfang* und am *Ende* einer ca. 10 m langen Koaxialleitung die Signalreflexionen minimal werden. Der FG liefert eine Rechteckspannung mit einer Frequenz von ca. 100 kHz und einer Amplitude von ca. 4 V. Gem. Abb. 9 wird am Ende der Leitung zunächst ein Abschlusswiderstand $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ eingestellt. Das Signal am Ausgang des Funktionsgenerators wird mit dem Oszilloskop beobachtet und der Abschlusswiderstand R_1 am Anfang der Leitung gesucht, ab dem dieses Signal kaum noch verzerrt wird (R_1 , beginnend bei 100Ω , erhöhen). Anschließend bleibt dieser Widerstand eingestellt und R_2 wird solange erniedrigt, bis wiederum die geringste Signalverzerrung eintritt.

Frage 2:

- Welches sind die optimalen Abschlusswiderstände? Entsprechen die Ergebnisse den Erwartungen?
- Wie wirkt der Innenwiderstand R_i des Funktionsgenerators (ca. 50Ω) in der Schaltung?

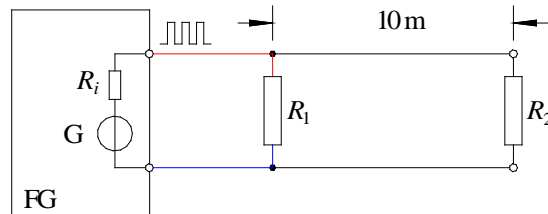


Abb. 9: Zur Messung des Abschlusswiderstandes am Koaxialkabel. Das Ersatzschaltbild des Funktionsgenerators FG besteht aus der idealen Spannungsquelle G und dem Innenwiderstand R_i . Die hier und in den folgenden Abbildungen farbig (blau und rot) gezeichneten Leitungen stellen Verbindungen mit Laborkabeln dar, die schwarz gezeichneten Leitungen sind Koaxialkabel.

3.2.2 Signallaufzeit und Ausbreitungsgeschwindigkeit

Es wird eine Schaltung gem. Abb. 10 aufgebaut. Der Funktionsgenerator liefert wieder eine Rechteckspannung (Frequenz ca. 100 kHz, Amplitude ca. 4 V), die mit einem RC -Glied (*Hochpass*) differenziert wird ($C = 0,1 \text{ nF}$; $R_1 = 50 \Omega$). Man erhält so kurze Impulse (vgl. Abb. 7), die in eine ca. 50 m lange Koaxialleitung eingekoppelt werden (tatsächliche Länge gem. Aufkleber, Fehler $\pm 1 \text{ cm}$).

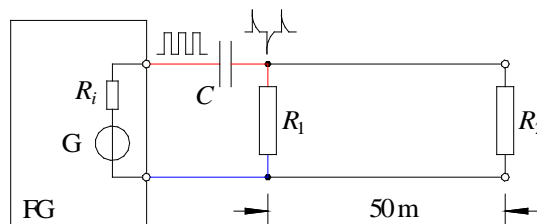


Abb. 10: Zur Laufzeitmessung im Koaxialkabel.

Das Ende der Leitung wird mit $R_2 = 1 \Omega$ abgeschlossen, wodurch eine nahezu vollständige Reflexion mit umgekehrtem Vorzeichen erreicht wird; am Leitungsanfang bildet der Widerstand R_1 des RC -Gliedes den Abschlusswiderstand.

Das Signal am Anfang der Leitung wird auf dem Oszilloskop dargestellt und in einem Bildschirmfoto gespeichert. Aus der Messung des zeitlichen Abstands eines hinlaufenden und des zugehörigen reflektierten Impulses wird die Signallaufzeit bestimmt.

Frage 3:

- Welche Ausbreitungsgeschwindigkeit ergibt sich hieraus im Vergleich zu dem aus L_0 und C_0 mit Gl. (42) berechnetem Wert?

3.2.3 Mehrfachreflexionen

Es soll zunächst verstanden werden, wie Signalverzerrungen durch Mehrfachreflexionen zustande kommen und wie sie aussehen. Dazu wird ein Aufbau gem. Abb. 11 verwendet. R_i wirkt zusammen mit R_l (Parallelschaltung) als eingangsseitiger Leitungsabschluss. Das Ende der 50 m langen Koaxialleitung wird mit R_2 abgeschlossen. Am Funktionsgenerator wird eine *rein positive* Rechteckspannung eingestellt (Frequenz 100 kHz, $U_{\max} = 4 \text{ V}$, $U_{\min} = 0 \text{ V}$)³.

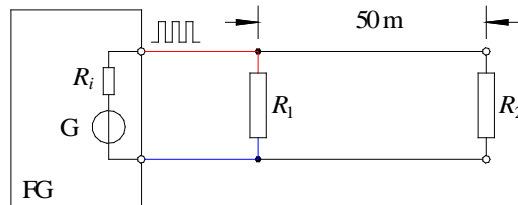


Abb. 11: Aufbau zur Messung von Mehrfachreflexionen.

Für zwei Widerstandskombinationen, nämlich

- a) $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$
- b) $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$

wird jeweils das Signal am Anfang der Leitung in einem Bildschirmfoto gespeichert und anschließend vermessen. Dazu werden die Höhen ΔU und Längen Δt der einzelnen Spannungsstufen in den entstehenden stufenförmigen *Spannungsverläufen* $U(t)$ in der *ersten halben Periode* der Rechteckspannung gemessen. Für 3 – 4 Stufen ist eine Messung möglich. Abb. 12 zeigt schematisch zwei typische Impulsverläufe für die Fälle a) und b).

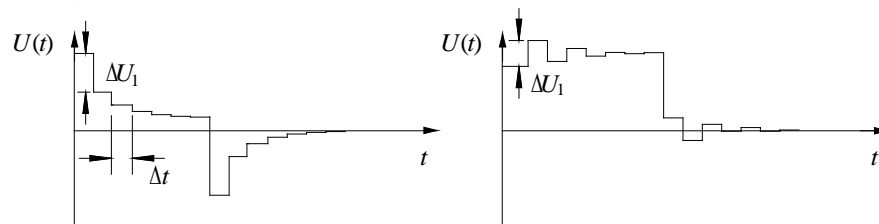


Abb. 12: Typische Verzerrungen von Rechteckimpulsen infolge von Mehrfachreflexionen in schematischer, idealisierter Darstellung. *Links*: erste Spannungsstufe $\Delta U_1 < 0$, *rechts*: erste Spannungsstufe $\Delta U_1 > 0$. Tatsächlich werden keine scharfen Stufen beobachtet, sondern abgerundete Impulsverläufe.

Die gefundenen Impulsverläufe sollen qualitativ mit den Erwartungen verglichen werden. Dazu wird für beide Fälle je eine Skizze der ersten hin- und rücklaufenden Signale $U_i(t)$ und ihrer Überlagerung angefertigt, die den resultierenden Spannungsverlauf

$$(54) \quad U(t) = \sum_i U_i(t)$$

bis zur zweiten Stufe plausibel macht (vgl. Abb. 13).

Dazu folgender Hinweis: Auf dem Oszilloskop sieht man die additive Überlagerung aller hin- und rücklaufenden Impulse. Einen reflektierten Impuls kann man von einem hinlaufenden aber nur dann zeitlich getrennt wahrnehmen („auflösen“), wenn die Laufzeit für die in Frage kommende Strecke (hin und zurück) genügend lang ist. Reflexionen am *Kabelanfang* werden daher mit dem am Anfang der Leitung angeschlossenen Oszilloskop nicht zeitlich getrennt von den übrigen Signalen beobachtbar sein.

³ Hinweis: Dazu muss eine geeignete Offset-Spannung am Funktionsgenerator eingestellt werden. Bei einer Amplitude von 4.0 V (VPP) entspricht das für den Offset 2.0 V (VDC).

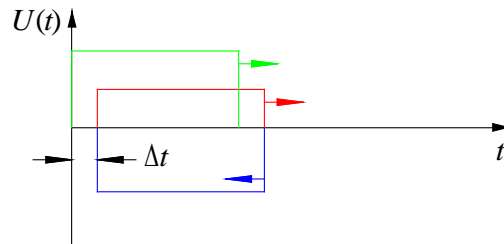


Abb. 13: Zur Veranschaulichung des Zustandekommens von Mehrfachreflexionen in einer Anordnung gem. Abb. 11. Die Signalbeobachtung erfolgt über dem Widerstand R_1 . In grün ist der erste vom FG ausgehende Impuls gezeichnet (U_1), in blau der an R_2 reflektierte Impuls (U_2), der mit der Zeitverzögerung Δt an R_1 ankommt und in rot der an der Kombination $R_1 \parallel R_2$ reflektierte Impuls (U_3). Die Amplituden und Vorzeichen der reflektierten Impulse hängen von den Widerstandswerten ab.

3.2.4 Reflexionskoeffizient

Nachdem qualitativ bekannt ist, wie die teilweise recht komplizierten Signalverläufe durch Mehrfachreflexionen zustande kommen, sollen die Reflexionskoeffizienten quantitativ gemessen werden. Dazu wird in der in Kap. 3.2.3 benutzten Anordnung $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ gewählt, wodurch am Leitungsanfang praktisch keine Reflexionen stattfinden. Die Einstellungen am FG bleiben gegenüber Kap. 3.2.3 unverändert. Das Signal am Anfang der Leitung wird mit dem Oszilloskop betrachtet und für etwa 10 verschiedene Widerstände R_2 im Bereich $1 \text{ }\Omega$ bis $10 \text{ k}\Omega$ (5 im Bereich $1 \text{ }\Omega < R_2 < Z_0$, 5 im Bereich $Z_0 < R_2 < 10 \text{ k}\Omega$) wird jeweils die Höhe der ersten Spannungsstufe, ΔU_1 , sowie einmal die Amplitude U_0 des Eingangssignals gemessen. Der Reflexionskoeffizient ρ wird berechnet und grafisch über R_2 aufgetragen (logarithmische Skala für R_2). In das gleiche Diagramm werden auch die theoretischen Erwartungen nach Gl. (39) eingetragen und mit den Messwerten verglichen.