

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA  
Theoretisch-Physikalisches Institut



BACHELORARBEIT

Untersuchungen zur letzten stabilen  
Kreisbahn in erst-post-Newtonscher  
Näherung

*Autor:* Stefan LANDMANN  
*Matrikel Nr.:* 11 84 00  
*Geburtsort:* Frechen

7. Juli 2013

*1. Gutachter und Betreuer:*  
**Prof. Dr. Gerhard SCHÄFER**  
*2. Gutachter:*  
**Prof. Dr. Karl-Heinz LOTZE**

## Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet habe, und dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahrens gewesen ist.

---

Ort, Datum

---

Stefan Landmann

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Bachelor-Arbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

---

Ort, Datum

---

Stefan Landmann

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Die Einsteinschen Feldgleichungen . . . . .	2
2.2	Der Newtonsche Grenzfall . . . . .	3
2.3	Das post-Newtonsche Näherungsverfahren . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Vorbetrachtungen: Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn im Testteilchenlimit</b>	<b>6</b>
3.1	Exakte Berechnung . . . . .	6
3.1.1	Berechnung mithilfe eines koordinatenabhängigen Zuganges . . . . .	6
3.1.2	Berechnung mithilfe eines koordinateninvarianten Zuganges . . . . .	8
3.2	Berechnung in 1-PN-Näherung . . . . .	11
3.2.1	Bestimmung des numerischen Faktors $\gamma$ für verschiedene Koordinatensysteme	11
3.2.2	Berechnung mithilfe eines koordinatenabhängigen Zuganges . . . . .	14
3.2.3	Berechnung mithilfe eines koordinateninvarianten Zuganges . . . . .	18
3.2.4	Zusammenfassung der bisherigen Resultate . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Bestimmung der letzten stabilen Kreisbahn eines Binärsystems</b>	<b>19</b>
4.1	Berechnung mithilfe eines koordinatenabhängigen Zuganges . . . . .	19
4.2	Berechnung mithilfe eines koordinateninvarianten Zuganges . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>21</b>

## 1 Einleitung

Jeder Physikstudent wird sich im Laufe seines Studiums mit der Diskussion der Planetenbahnen als machtvollere Anwendung der Newtonschen Mechanik auseinandersetzen. Dabei werden die drei Keplerschen Gesetze nachvollzogen und mithilfe des Newtonschen Kraftgesetzes bewiesen. Darüber hinaus wird mithilfe des sogenannten effektiven Potentials berechnet für welche Energien gebundene Bahnen existieren. Dabei stellt sich heraus, dass für jeden beliebigen Abstand zweier Massen eine stabile Kreisbahn möglich ist, sofern der Drehimpuls und die Energie richtig gewählt sind. Dieser Umstand lässt sich allgemein für anziehende Potentiale mit einer  $r^n$ -Abhängigkeit ( $n > -2$ ), wie es für das Newtonsche Gravitationspotential der Fall ist, beweisen [1, S.96].

Gerade deshalb ist es so interessant, dass sich diese intuitiv korrekt erscheinende Erkenntnis im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie als falsch erweist. Betrachtet man hier ein Testteilchen, das sich im Gravitationsfeld eines anderen Körpers bewegt, so stellt man fest, dass es einen minimalen Abstand des Testteilchens zum Körper gibt, ab dem keine stabile Kreisbahn mehr möglich ist. Die Bahn, die das Teilchen dann beschreibt, bezeichnet man als **letzte stabile Kreisbahn**. Innerhalb dieser Bahn wird das Teilchen schon durch eine kleine Störung in den anderen Körper hineinstürzen.

Für Mehrkörpersysteme verhält es sich komplizierter, da hier Gravitationswellenemission berücksichtigt werden muss. So ist die Annahme einer stationären Bahn für ein Testteilchen exakt, für ein verhältnismäßig leichtes Teilchen im Gravitationsfeld eines schweren Körpers eine gute Näherung und für ein Binärsystem aus zwei vergleichbaren Massen nur noch eine grobe Approximation. Ein leichtes Teilchen wird in Folge des Energieverlustes eine langsame Spiralbewegung zum Zentrum hin ausführen. Nach dem Überschreiten der letzten stabilen Kreisbahn wird sich die Spiralbewegung stark beschleunigen und nicht mehr durch Gravitationswellenemission, sondern durch konservative Kräfte dominiert werden. Im Falle zweier vergleichbarer Massen verhält es sich ähnlich, nur dass die Emission der Gravitationswellen auch nach Überschreiten der letzten stabilen Kreisbahn eine große Rolle spielen wird [2].

Es lässt sich festhalten, dass die letzte stabile Kreisbahn eine wichtige Kenngröße bei der Vereinigung zweier kompakter Objekte, wie z. B. Neutronensternen oder Schwarzen Löcher, darstellt und deshalb eine möglichst exakte Bestimmung dieser von großem Interesse ist.

Ziel dieser Bachelorarbeit ist es, die letzte stabile Kreisbahn eines Binärsystems in erst-post-Newtonscher Näherung zu bestimmen. Dies wird in verschiedenen Koordinatensystemen durchgeführt, um zu zeigen, dass die letzte stabile Kreisbahn eine koordinateninvariante Eigenschaft darstellt.

Zuallererst wird in den Vorbetrachtungen ein grober Überblick über die für diese Arbeit notwendigen Elemente der Allgemeinen Relativitätstheorie gegeben. Daraufhin wird die letzte stabile Kreisbahn im Testteilchenlimit mithilfe eines koordinatensystemabhängigen und eines -unabhängigen Verfahrens exakt berechnet. Um die Genauigkeit der erst-post-Newtonschen Näherung einschätzen zu können, wird danach die letzte stabile Kreisbahn für ein Testteilchen in erster Näherung bestimmt und mit dem exakten Resultat verglichen. Schließlich wird mithilfe einer post-Newtonschen  $n$ -Körper-Hamiltonfunktion die letzte stabile Kreisbahn für ein Binärsystem mit unterschiedlichen Methoden ermittelt.

## 2 Physikalische Grundlagen

### Konventionen

In dieser Arbeit wird die Minkowski-Metrik durchgehend als

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} \eta_{00} = 1 \\ \eta_{0i} = 0 \\ \eta_{ij} = -\delta_{ij} \end{cases}$$

dargestellt, wobei griechische Indices von null bis drei und lateinische Indices von eins bis drei laufen:

$$\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{und} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Dabei ist die Koordinate  $x^0 = ct$ .

### 2.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen beschreiben die Wechselwirkung zwischen Materie und der Gravitation, die als Krümmung der Raumzeit in Erscheinung tritt. Dabei wird mit Materie alles bezeichnet, was ein Gravitationsfeld erzeugen kann, also z. B. Protonen und Elektronen, aber auch Felder. Die gesuchten Gleichungen sind nicht aus bekannten Gesetzen ableitbar, aber ergeben sich ganz natürlich, wenn plausible physikalische Forderungen gestellt werden. Diese lauten:

- Die Feldgleichungen sollen Tensorgleichungen sein (Erfüllung des Kovarianzprinzips).
- Es sollen partielle Differentialgleichungen für die Komponenten des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  sein, die maximal in zweiter Ordnung auftreten und linear in den höchsten Ableitungen sind.
- Der Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$  soll als Quelle des Gravitationsfeldes auftreten.
- Im Newtonschen Grenzfall sollen die Feldgleichungen in die Poisson-Gleichung

$$\Delta U = 4\pi G\mu$$

der Newtonschen Gravitationstheorie übergehen, wobei  $U$  das Gravitationspotential,  $G$  die Gravitationskonstante und  $\mu$  die Massendichte darstellt.

- Wenn die Raumzeit flach ist, soll  $T_{\mu\nu}$  verschwinden.

Mithilfe dieser Forderungen lässt sich zeigen, dass die Einsteinschen Feldgleichungen die Form

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

besitzen müssen. Hierbei ist  $G_{\mu\nu}$  der sogenannte Einstein-Tensor, der die Gestalt  $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$  besitzt,  $\kappa$  eine Konstante, die sich aus dem Newtonschen Grenzfall ergibt,  $T_{\mu\nu}$  der Energie-Impuls-Tensor,  $R^{\mu\nu}$  der Ricci-Tensor, welcher sich durch Verjüngung des Krümmungstensor bestimmen lässt und  $R$  der Ricci-Skalar, welcher sich durch Verjüngung des Ricci-Tensors

ergibt. Aufgrund der Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors erfüllt der Einstein-Tensor die verjüngten Bianchi Identitäten (2.2). Darüber hinaus ist der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch, d.h. es gilt:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0 \quad \text{Divergenzfreiheit des Einsteintensors} \quad (2.2)$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} \quad \text{Symmetrie des Einsteintensors.} \quad (2.3)$$

Es sei abschließend noch auf eine interessante Eigenschaft der Feldgleichungen hingewiesen: Es ist prinzipiell nicht möglich, sich eine Verteilung  $T_{\mu\nu}$  vorzugeben und daraus den metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  zu berechnen. Dies liegt daran, dass die Bedingung  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  erfüllt sein muss. Nun kann die kovariante Ableitung aber nur ausgeführt werden, wenn der metrische Tensor schon bekannt ist.

Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied gegenüber z. B. der Elektrodynamik, in der, unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung, eine beliebige Ladungsverteilung vorgegeben und daraus die Felder berechnet werden können. Vgl. hierzu auch STEPHANI [3, S.87-89].

## 2.2 Der Newtonsche Grenzfall

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, ist eine der Forderungen an die Einsteinschen Feldgleichungen, dass sie im Newtonschen Grenzfall in die Poissongleichung

$$\Delta U = 4\pi G\mu \quad (2.4)$$

übergehen. Für diesen Grenzfall kann die entsprechende Metrik hergeleitet werden, welche, wie im weiteren Verlauf deutlich wird, für die post-Newtonsche-Näherung eine wichtige Rolle spielt. Dabei gelten im Newtonschen Grenzfall folgende Annahmen:

1. Es gibt ein Koordinatensystem in dem die dominierende Komponente des Energie-Impuls-Tensors  $T_{00} = \mu c^2$  ist und alle anderen Komponenten des Tensors vernachlässigbar klein sind.
2. Die Metrik  $g_{\mu\nu}$  weicht nur gering von der eines Minkowski-Raumes ab, d.h.:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Dabei werden alle Terme, die in  $f_{\mu\nu}$  und seinen Ableitungen quadratisch sind, vernachlässigt.

3. Langsame Veränderlichkeit: Ableitungen nach  $x^0 = ct$  werden vernachlässigt.

Durch Verjüngung der Einsteinschen Feldgleichungen erhält man

$$-R = \kappa T \quad (2.6)$$

und damit

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.7)$$

Aufgrund der ersten Annahme ist nur die Gleichung für die  $R_{00}$  Komponente von Bedeutung:

$$R_{00} = \kappa \left( T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right) = \kappa \left( \mu c^2 - \frac{1}{2} \mu c^2 \right) = \frac{1}{2} \kappa \mu c^2. \quad (2.8)$$

Darüber hinaus gilt nach Definition:

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \Gamma^\gamma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma_{\mu\beta}. \quad (2.9)$$

Wobei hier die sog. Christoffelsymbole verwendet wurden, welche folgendermaßen definiert sind:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\nu\gamma,\mu} + g_{\mu\gamma,\nu} - g_{\mu\nu,\gamma}).$$

Aufgrund der zweiten Annahme werden die in den Christoffel-Symbolen quadratischen Glieder vernachlässigt und man erhält:

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\gamma} (f_{\gamma\nu,\mu\beta} + f_{\alpha 4,\gamma 0} - f_{00,\alpha\gamma} - f_{\alpha\gamma,00}). \quad (2.10)$$

Außerdem können alle Zeitableitungen vernachlässigt werden, woraus nach Verjüngung das Endergebnis folgt:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\gamma} f_{00,\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \Delta f_{00}. \quad (2.11)$$

Von der Form her ist dies schon eine Poisson-Gleichung, es muss aber noch gezeigt werden, dass  $f_{00}$  dem Gravitationspotential entspricht. Dazu nutzen wir die Geodätengleichung:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (2.12)$$

Im Newtonschen Grenzfall kann die Eigenzeit  $\tau$  durch die Koordinatenzeit  $t$  ersetzt werden. Außerdem ist die dominierende Komponente der Vierergeschwindigkeit  $u^0 = c$ , sodass man folgende Gleichung erhält:

$$\frac{d^2 x^n}{dt^2} = -\Gamma^n_{00} c^2 = \frac{1}{2} \eta^{nm} g_{00,m} c^2 = \frac{1}{2} \eta^{nm} f_{00,m} c^2 = -\frac{1}{2} \nabla f_{00} c^2. \quad (2.13)$$

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Newtonschen Gravitationspotential  $U$  lautet:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U. \quad (2.14)$$

Durch einen Vergleich der beiden Gleichungen (2.13) und (2.14) erhält man den Zusammenhang

$$U = \frac{1}{2} f_{00} c^2 \quad \text{und somit} \quad g_{00} = \eta_{00} + f_{00} = \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right). \quad (2.15)$$



Wir erhalten also die Metrik:

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag} \left( 1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1 \right) \quad (2.16)$$

in kartesischen Koordinaten und

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag} \left( 1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -r^2, -r^2 \sin^2(\theta) \right) \quad (2.17)$$

in Kugelkoordinaten. Vgl. hierzu auch STEPHANI [3, S.89-91] und [4, S.121].

### 2.3 Das post-Newtonsche Näherungsverfahren

Die Einsteinschen Feldgleichungen bilden aufgrund der Symmetrie des Einsteintensors ein System aus zehn nichtlinearen Differentialgleichungen zur Bestimmung des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$ . Da der Einstein-Tensor die Bianchi-Identitäten (2.2) erfüllt, sind vier der zehn Gleichungen abhängig voneinander.

Deshalb ist es nur in sehr seltenen und hochsymmetrischen Fällen möglich, eine exakte Lösung der Feldgleichungen zu finden. Dabei sind viele interessante und wichtige physikalische Situationen nicht hochsymmetrisch, so z. B. Bedingungen unter denen Emission von Gravitationswellen vorausgesagt wird. Darüber hinaus ist es, wie bereits erwähnt wurde, im Allgemeinen nicht möglich, sich eine Massenverteilung vorzugeben und daraus den metrischen Tensor zu berechnen.

Das post-Newtonsche-Näherungsverfahren bietet die Möglichkeit, eine genäherte Lösung für schwache Gravitationsfelder und kleine Geschwindigkeiten, d. h.  $v/c \lesssim 1/3$ , zu finden. Bei solchen Bedingungen hat es sich als sinnvoll erwiesen, die Metrik als Reihenentwicklung darzustellen. Dabei wird die Newtonsche Gravitationstheorie als Ausgangspunkt genutzt und die Entwicklung in Termen mit der Ordnung  $(\frac{v}{c})^{2n}$  durchgeführt, welche dann als die n-te Post-Newtonsche-Ordnung (PN-Ordnung) bezeichnet wird. Es können aber nicht nur gradzahlige, sondern auch halbzahlige Ordnungen auftreten. So kommt z. B. Emission von gravitativer Strahlung ab der 2,5-PN-Ordnung vor. Die nullte post-Newtonsche Näherung entspricht dann der Newtonschen Gravitationstheorie. Ein wesentlicher Bestandteil der post-Newtonschen-Näherung ist außerdem, dass es gelingt kanonische Variablen einzuführen, sodass Mehrteilchendynamiken als Hamiltonsche Systeme mit kanonischer Struktur betrachtet werden können. Hierbei erhält man als Resultat eine Hamiltonfunktion der Form

$$H = H_{\text{Newton}} + H_{1\text{PN}} + H_{2\text{PN}} + \dots \quad (2.18)$$

in den kanonischen Variablen.

Für ein abgeschlossenes stationäres physikalisches System, wie es später betrachtet wird, gilt der Virialsatz, sodass die Entwicklung nach  $(v/c)^2$  einer Entwicklung nach  $\frac{GM}{c^2 r}$  entspricht. Hierbei ist  $G$  die Gravitationskonstante,  $M$  die Gesamtmasse des Systems und  $r$ , im Falle eines Binärsystems, der typische Abstand der beiden betrachteten Körper [5, S.1-3].

Die Effektivität dieses Näherungsverfahrens zeigt sich bereits darin, dass im Rahmen der 1-PN-Näherung schon mit einem Korrekturterm eine Anzahl von klassischen Effekten der Allgemeinen Relativitätstheorie vorhersagbar und gut beschreibbar ist. So seien als Beispiele die „anomale“ Periheldrehung, eine von den Vorhersagen der Newtonschen Theorie abweichende Verschiebung des Perihels von z. B. Planetenbahnen, aber auch die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne und sogar gravitomagnetischen Effekte genannt [6].

### 3 Vorbetrachtungen: Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn im Testteilchenlimit

In diesem Abschnitt werden die Methoden, mit denen die letzte stabile Kreisbahn berechnet werden kann, am Beispiel des Testteilchens in der Schwarzschildmetrik vorgeführt. Hierbei kann ein exaktes Ergebnis berechnet werden, an dem später überprüft wird, wie gut das Näherungsverfahren funktioniert. Mit den gleichen Methoden wird im weiteren Verlauf der Arbeit die letzte stabile Kreisbahn eines Binärsystems bestimmt.

#### 3.1 Exakte Berechnung

##### 3.1.1 Berechnung mithilfe eines koordinatenabhängigen Zuganges

In dieser Arbeit werden im Wesentlichen drei Koordinatensysteme genutzt: Schwarzschildkoordinaten ( $R$ ), harmonische Koordinaten ( $\rho$ ) und isotrope Koordinaten ( $r$ ). Diese hängen über folgende Transformation zusammen:

$$R = \rho + \frac{GM}{c^2} = r \left( 1 + \frac{GM}{2c^2 r} \right) \quad [2, \text{S.514}]. \quad (3.19)$$

Eine wichtige Kenngröße ist der sogenannte **Schwarzschildradius**, der in Schwarzschildkoordinaten bekanntermaßen bei  $R_s = 2\frac{GM}{c^2}$  liegt. Mithilfe von Gleichung (3.19) erhält man in isotropen Koordinaten den Radius  $r_s = \frac{GM}{c^2}$  und in harmonischen Koordinaten  $\rho_s = \frac{GM}{c^2}$ .

Zur Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn wird die Hamiltonfunktion eines Testteilchens in der Schwarzschildmetrik in Abhängigkeit der radialen Koordinate  $r$  und des Drehimpulses  $J$ ,  $H(r, J)$  bestimmt. Damit stabile Kreisbahnen existieren können muss  $H(r, J)$  ein lokales Minimum besitzen, d. h.:

$$\frac{\partial H(r, J)}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0, \quad \frac{\partial^2 H(r, J)}{\partial r^2} \stackrel{!}{\geq} 0. \quad (3.20)$$

#### Bestimmung der Hamiltonfunktion eines Testteilchens in der Schwarzschildmetrik

Das Testteilchen bewegt sich auf einer zeitartigen Geodäten durch die Raumzeit, welche durch die Schwarzschildmetrik charakterisiert ist. Die Schwarzschildmetrik ist eine Lösung der Einsteinschen-Feldgleichungen für eine räumlich isolierte, kugelsymmetrische, nicht rotierende und ungeladene Massenverteilung. Außerhalb der Massenverteilung nimmt das Linienelement die folgende Form an:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2. \quad (3.21)$$

Dabei ist die radiale Koordinate  $r$  so definiert, dass der Umfang einer Kugel mit  $t = \text{const.}$  und  $r = \text{const.}$  den Wert  $2\pi r$  annimmt. Die Koordinaten  $\theta$  und  $\phi$  entsprechen den in Kugelkoordinaten üblicherweise genutzten Winkeln.

Zur Bestimmung der Geodäten verwenden wir, dass die Bogenlänge  $s$  ein Extremum annehmen

muss [4, S.113]:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} ds \stackrel{!}{=} \mathbf{Extremal}. \quad (3.22)$$

Um diese Gleichung auswerten zu können, parametrisieren wir die Bogenlänge durch die Koordinatenzeit  $t$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt \stackrel{!}{=} \mathbf{Extremal}. \quad (3.23)$$

Das Linienelement kann durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.24)$$

ersetzt werden. Dies entspricht von der Form her dem Hamilton-Prinzip der kleinsten Wirkung mit der Lagrange-Funktion:

$$L = -\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}. \quad (3.25)$$

Unter der Annahme, dass sich das Teilchen in der Ebene  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  bewegt, nimmt die Lagrange-Funktion folgende Gestalt an:

$$L = -\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}. \quad (3.26)$$

Für den Fall, dass sich das Teilchen auf einer Kreisbahn bewegt, ist  $\frac{dr}{dt} = 0$ . Damit nimmt die Lagrange-Funktion die Form

$$L(r, \phi) = -\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} \quad (3.27)$$

an.

Die Hamiltonfunktion ergibt sich durch die Legendre-Transformation

$$H(x^i, p^i) = \dot{x}^i p_i - L(x^i, \dot{x}^i) \quad (3.28)$$

mit den generalisierten Koordinaten  $x^i$ , den generalisierten Impulsen  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$  und den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ . Da  $\phi$  nicht explizit in der Lagrange-Funktion vorkommt, ist der Impuls  $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$  eine Erhaltungsgröße und es folgt:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \omega \left( c^2 - \frac{2GM}{r} - \omega^2 r^2 \right)^{-1/2}. \quad (3.29)$$

Mit der Bezeichnung  $\omega = \frac{d\phi}{dt}$  erlangt man einen Ausdruck für die gewünschte Hamiltonfunktion:

$$H(r, J) = \frac{\partial L}{\partial \omega} \omega(J) - L(r, \omega(J)) = c \left( 1 - \frac{GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{r(r - \frac{2GM}{c^2})}{J^2 + r^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.30)$$

Vergleiche hierzu auch MARKLEY [7, S.48].

Nun muss die Hamiltonfunktion ein lokales Minimum besitzen, damit eine stabile Kreisbahn möglich ist, d. h. :

$$1. \text{ Bedingung: } \frac{\partial H}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0, \quad 2. \text{ Bedingung: } \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \stackrel{!}{\geq} 0 \quad (3.31)$$

Im Falle der letzten stabilen Kreisbahn tritt für die zweite Bedingung Gleichheit ein.

Damit liegt die letzte stabile Kreisbahn in Schwarzschildkoordinaten bei  $R_k = 6 \frac{GM}{c^2}$ , was genau drei Schwarzschildradien entspricht. In isotropen und in harmonischen Koordinaten liegt sie bei  $r_k = 4,95 \frac{GM}{c^2}$  und  $\rho_k = 5 \frac{GM}{c^2}$ , wie man mithilfe der Transformation (3.19) sieht. In den Abbildungen 1 und 2 auf der nächsten Seite ist die Hamiltonfunktion für verschiedene Drehimpulse dargestellt. In Abbildung 1 erkennt man sehr gut, dass ein Minimum (eine stabile Kreisbahn) und ein Maximum (instabile Kreisbahn) existieren. Abbildung 2 stellt gerade den Fall dar, dass in der 2. Bedingung Gleichheit vorliegt. Hier stellt das vorherige Minimum einen Sattelpunkt bei drei Schwarzschildradien dar. Dies entspricht der letzten stabilen Kreisbahn.

Man sieht schon an dieser Stelle, dass die letzte stabile Kreisbahn nahe am Schwarzschildradius liegt und es deshalb fraglich ist, ob eine erst-post-Newtonsche Näherung noch akzeptable Werte liefern kann. Dies wird im weiteren Verlauf noch genauer diskutiert.

### 3.1.2 Berechnung mithilfe eines koordinateninvarianten Zuganges

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, kann die letzte stabile Kreisbahn mithilfe der Hamiltonfunktion  $H(r, J)$  bestimmt werden, indem die ersten beiden Ableitungen nach der radialen Koordinate gleich null gesetzt werden.

Nun ist  $r$  keine koordinateninvariante Größe, sodass das im vorigen Abschnitt genutzte Verfahren, je nach Wahl des Koordinatensystems, unterschiedliche Werte für die letzte Kreisbahn liefert.

Ein anderer, koordinatenunabhängiger Weg nutzt aus, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  eine koordinateninvariante Größe ist. Stellt man die Hamiltonfunktion als  $H(\omega)$  dar, so erhält man eine invariante Hamiltonfunktion. Dabei eliminiert man  $r$  mithilfe der Bedingung für eine Kreisbahn

$$\frac{\partial H(r, J)}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.32)$$

und erhält somit  $H(J)$ . Des Weiteren gilt die Beziehung:

$$\frac{dH(J)}{dJ} = \omega. \quad (3.33)$$

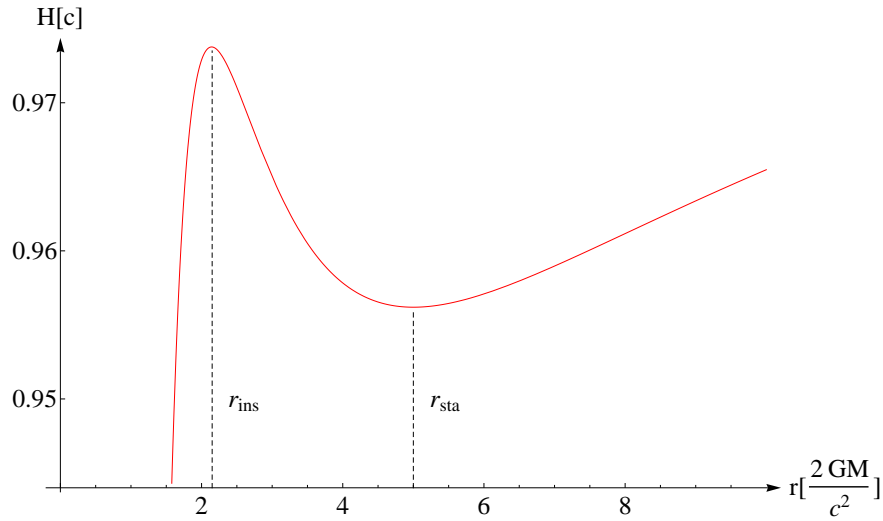


Abbildung 1: Die Hamiltonfunktion für ein Testteilchen mit dem Drehimpuls  $J = 3,78 \frac{GM}{c^2}$  in der Schwarzschildmetrik. Die radiale Koordinate ist in Schwarzschildradien angegeben. Die stabile Keisbahn  $r_{\text{sta}}$  ist bei ca. fünf Schwarzschildradien gut zu sehen. Das vordere Extremum stellt eine instabile Kreisbahn bei  $r_{\text{ins}}$  dar.

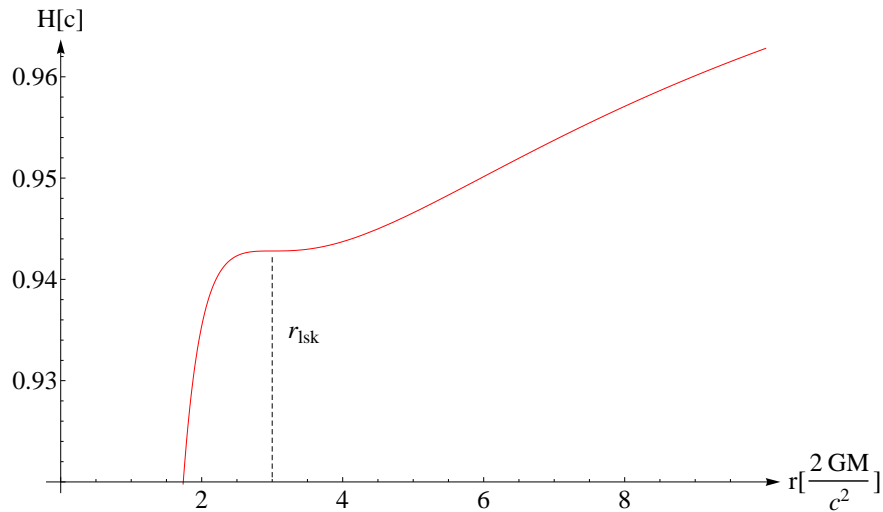


Abbildung 2: Die Hamiltonfunktion für ein Testteilchen mit  $J = 2\sqrt{3} \frac{GM}{c^2}$  in der Schwarzschildmetrik. Bei diesem Drehimpuls bildet sich anstelle eines Minimums ein Sattelpunkt bei drei Schwarzschildradien aus. Hier befindet sich die letzte stabile Kreisbahn  $r_{\text{isk}}$ .

Somit kann die Hamiltonfunktion  $H(\omega)$  bestimmt werden. Stabile Kreisbahnen können nur für

$$\frac{dH(\omega)}{d\omega} < 0 \quad (3.34)$$

existieren, was bedeutet, dass die letzte stabile Kreisbahn bei

$$\frac{dH(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (3.35)$$

liegt. Siehe hierzu auch SCHÄFER [5, S.24].

Hierbei sei im Hinblick auf die später angewandten Näherungsverfahren betont, dass die Verwendung eines invarianten Ansatzes nicht bedeutet, dass das erhaltene Resultat exakter ist als im Falle eines koordinatenabhängigen Ansatzes. Vielmehr zeigen die unterschiedlichen Ergebnisse, die man mittels der verschiedenen Verfahren erhält, die Unsicherheit in der Bestimmung der Kreisbahn.

Wir benutzen nun die Hamiltonfunktion (3.30) für ein Testteilchen in Schwarzschild-Koordinaten:

$$H(r, J) = c \left( 1 - \frac{GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{r(r - \frac{2GM}{c^2})}{J^2 + r^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.36)$$

Für eine Kreisbahn muss wieder die Relation

$$\frac{\partial H(r, J)}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.37)$$

erfüllt sein.

Unter Verwendung der Gleichung (3.33) erhält man:

$$\omega^2 = \frac{MG}{r^3} \quad (3.38)$$

in Schwarzschildkoordinaten<sup>1</sup>. Somit nimmt die Hamiltonfunktion die invariante Form

$$\boxed{\frac{H(x)}{c} = \frac{1 - 2x}{\sqrt{1 - 3x}} \quad \text{mit} \quad x = \left( \frac{GM\omega}{c^3} \right)^{2/3}} \quad (3.39)$$

an. Vergleiche auch mit dem Ergebnis von SCHÄFER in [5, S.25].

Hiermit erhält man für die Bedingung  $\frac{dH(\omega)}{d\omega} = 0$  einen Wert von  $\omega = \frac{1}{6\sqrt{6}} \frac{c^3}{MG}$ , was einem Ergebnis von  $r = 6 \frac{MG}{c^2}$  in Schwarzschildkoordinaten entspricht. Das Resultat stimmt also mit den Ergebnissen aus (3.1.1) überein.

---

<sup>1</sup>Diese Relation entspricht dem 3. Keplerschen Gesetz. Dort gilt  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ , wobei T die Umlaufzeit des Himmelskörpers und a die große Halbachse der Ellipse ist. Durch die Ersetzung  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  erhält man somit die gezeigte Relation.

### 3.2 Berechnung in 1-PN-Näherung

#### Vorgehensweise

Zur Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn wird die Hamiltonfunktion für ein Vielteilchensystem aus OHTA *et al.* [8, S.502] benutzt. Diese lautet<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
H = & \sum_a m_a c^2 + \frac{1}{2} \sum_a \frac{\mathbf{p}_a^2}{m_a} - \frac{1}{8c^2} \sum_a m_a \left( \frac{\mathbf{p}_a^2}{m_a^2} \right)^2 - \frac{G}{2} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} \\
& - \frac{G}{4c^2} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} \left[ (3+y) \left( \frac{\mathbf{p}_a^2}{m_a^2} + \frac{\mathbf{p}_b^2}{m_b^2} \right) - y \left\{ \frac{(\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{p}_a)^2}{m_a^2} + \frac{(\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{p}_b)^2}{m_b^2} \right\} \right. \\
& \left. - (7+2y) \frac{\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b}{m_a m_b} - (1-2y) \frac{(\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{p}_a)(\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{p}_b)}{m_a m_b} \right] \\
& + \frac{G^2}{2c^2} \sum_a \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} \frac{m_a m_b m_c}{r_{ab} r_{ac}} + y \frac{G^2}{2c^2} \sum_a \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} \frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}^2} (\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{n}_{ac}). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Dabei ist  $m_a$  die Masse,  $p_a$  der Impuls und  $r_a$  der Abstand zum Koordinatenursprung des Körpers a. Die Gleichung enthält einen koordinatensystemabhängigen, numerischen Faktor  $y$ . Dieser muss zuerst für die gewünschten Koordinatensysteme bestimmt werden, damit daraufhin mithilfe der Hamiltonfunktion die letzte stabile Kreisbahn ermittelt werden kann.

#### 3.2.1 Bestimmung des numerischen Faktors $y$ für verschiedene Koordinatensysteme

In der Arbeit von OHTA *et al.* [8] wurde die Hamiltonfunktion (3.40) hergeleitet, indem zuerst die dazugehörige Metrik aufgestellt wurde. In dieser Metrik kommt auch der numerische Faktor  $y$  vor. Nun kann  $y$  bestimmt werden, indem die Schwarzschildmetrik in den gewünschten Koordinaten als Taylor-Entwicklung in  $1/c^2$  dargestellt wird. Durch einen Vergleich dieser Taylor-Entwicklung mit der Metrik aus [8], welche im Falle eines einzelnen Körpers der Schwarzschildmetrik in 1-PN-Näherung entspricht, erhält man schließlich  $y$ . In dieser Arbeit werden, wie bereits erwähnt, Schwarzschild- ( $R$ ), harmonische ( $\rho$ ) und isotrope Koordinaten ( $r$ ) benutzt.

Die Metrik für beliebig viele Körper ist in erst-post-Newtonscher Ordnung:

$$h_{00}^{(2)} = \frac{2G}{c^2} \sum_a \frac{m_a}{r_a}, \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
h_{00}^{(4)} = & - \frac{2G^2}{c^4} \sum_a \sum_b \frac{m_a m_b}{r_a r_b} - \frac{2G^2}{c^4} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} + \frac{3G}{c^4} \sum_a \frac{m_a}{r_a} \mathbf{v}_a^2 \\
& - y \frac{G^2}{c^4} \sum_a \sum_b \frac{m_a m_b}{r_a^2} (\mathbf{n}_a \mathbf{n}_b) + y \frac{G^2}{c^4} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a^2} (\mathbf{n}_a \mathbf{n}_{ab}), \tag{3.42}
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>In die Hamiltonfunktion in [8] hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen, sodass man dort im 5. Summanden  $\frac{G^2}{4c^2}$  anstelle von  $\frac{G}{4c^2}$  findet. Dies erkennt man durch eine Einheitenbetrachtung oder einem Vergleich mit der Lagrange-Funktion, aus der die Hamiltonfunktion gewonnen wurde.

$$h_{0i}^{(3)} = -\frac{G}{2c^3} \sum_a \frac{m_a}{r_a} (7v_a^i + n_a^i(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{v}_a)) - y \frac{G}{2c^3} \sum_a \frac{m_a}{r_a} (v_a^i - n_a^i(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{v}_a)), \quad (3.43)$$

$$h_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} \frac{2G}{c^2} \sum_a \frac{m_a}{r_a} + y \frac{G}{c^2} \sum_a \frac{m_a}{r_a} (\delta_{ij} - n_a^i n_a^j). \quad (3.44)$$

Dabei steht der obere Index für die Potenz, in der  $1/c$  im jeweiligen Term vorkommt.

Nun zeigt sich, warum in (2.16) die Metrik für den Newtonschen-Grenzfall hergeleitet wurde: Dadurch ist bekannt, dass für die  $h_{00}$ -Komponente Terme bis  $1/c^4$  beachtet werden müssen, während für die  $h_{ij}$  alle Terme bis  $1/c^2$  ausreichen, um der erst-post-Newtonschen Näherung gerecht zu werden.

Für einen einzelnen Körper, der sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet ( $v_a = 0$ ), erhält man die Metrik:

$$h_{00}^{(2)} = \frac{2GM}{c^2 r}, \quad h_{0i}^{(3)} = 0, \quad (3.45)$$

$$h_{00}^{(4)} = -\frac{2G^2 M^2}{c^4 r^2} - y \frac{2G^2 M^2}{c^4 r^2}, \quad (3.46)$$

$$h_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} \frac{2GM}{c^2 r} + y \frac{2GM}{c^2 r} (\delta_{ij} - n^i n^j). \quad (3.47)$$

Daraus kann das Linienelement gewonnen werden:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 + \frac{2GM}{r} dt^2 + \frac{2GM}{c^2 r} \left( GM \left( -1 - \frac{y}{2} \right) \frac{dt^2}{r} + \left( 1 + \frac{y}{2} \right) d\mathbf{x}^2 - \frac{y}{2} \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{r^2} \right). \quad (3.48)$$

Hierbei ist  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ .

Nun kann mit der Taylor-Entwicklung der Schwarzschildmetrik begonnen werden. Alle im nächsten Abschnitt verwendeten Linienelemente<sup>3</sup> sind aus WEINBERG [9, S.180-181] entnommen.

### Kartesische Koordinaten

Die Standardform der Schwarzschildmetrik lautet:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2. \quad (3.49)$$

Mithilfe der Transformation

$$x^1 = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad x^2 = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad x^3 = r \cos(\theta) \quad (3.50)$$

<sup>3</sup>In der Arbeit von Ohta *et al.* [8] und in [9] wurde gleichermaßen die Notation  $(\eta) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  verwendet, was an dieser Stelle zur Bestimmung von  $y$  übernommen wird.



erhält man

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left[ \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} - 1 \right] \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{r^2} + d\mathbf{x}^2. \quad (3.51)$$

Eine Reihenentwicklung dieses Linienelementes nach  $1/c$  ergibt:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 + \frac{2GM}{r} dt^2 + \frac{2GM}{c^2 r} \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{r^2} + O[1/c^4]. \quad (3.52)$$

Vergleicht man dies mit (3.48), so sieht man, dass Übereinstimmung für den Fall  $y = -2$  vorliegt.

### Isotrope Koordinaten

Um die Metrik in isotropen Koordinaten zu erhalten, geht man von der Standardform (3.49) aus und führt die Transformation  $r = \rho \left(1 + \frac{MG}{2\rho c^2}\right)^2$  durch. Dies ergibt:

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{GM}{2c^2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{GM}{2c^2\rho}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{GM}{2c^2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2(\theta) d\phi^2). \quad (3.53)$$

Entwickelt man das Linienelement nach  $\frac{1}{c^2}$ , so erhält man:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 + \frac{2GM}{r} dt^2 + \frac{2GM}{c^2 r} \left( -GM \frac{dt^2}{r} + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right) + O[1/c^4]. \quad (3.54)$$

Mit der Beziehung:

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.55)$$

Durch einen Vergleich mit (3.48) erkennt man, dass  $y=0$  sein muss, damit eine Übereinstimmung vorliegt. Somit ist der numerische Faktor für isotrope Koordinaten bestimmt.

### Harmonische Koordinaten

Zu guter Letzt wird der numerische Faktor für harmonische Koordinaten bestimmt. Das Linienelement erhält man mithilfe der Koordinatentransformation:

$$R = r - \frac{MG}{c^2}, \quad X_1 = R \sin(\theta)\cos(\phi), \quad X_2 = R \sin(\theta)\sin(\phi), \quad X_3 = R \cos(\theta). \quad (3.56)$$

Als Resultat erhält man

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)}{\left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right)} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right)^2 d\mathbf{X}^2 - \frac{\left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right) G^2 M^2}{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) R^4} (\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})^2. \quad (3.57)$$

Die Reihenentwicklung des Linienelements hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + d\mathbf{X}^2 + \frac{2GM}{r} dt^2 \\ &+ \frac{2GM}{c^2 r} \left( -GM \frac{dt^2}{r} + d\mathbf{X}^2 \right) + O[1/c^4]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Man erkennt, dass die hier relevanten 1-PN-Terme mit denen der Reihenentwicklung der isotropen Koordinaten übereinstimmen und somit im Rahmen dieser Näherung auch für harmonische Koordinaten  $y=0$  gilt.

Somit konnten die numerischen Faktoren für die verwendeten Koordinatensysteme folgendermaßen bestimmt werden:

Kartesische Schwarzschildkoordinaten:	$y = -2$
Harmonische Koordinaten:	$y = 0$
Isotrope Koordinaten:	$y = 0$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Hamiltonfunktionen in harmonischen und isotropen Koordinaten im Allgemeinen nicht gleich sind. Dies erkennt man, indem man die 2-PN-Terme der Metriken betrachtet, die sich offensichtlich unterscheiden. Damit besteht die Gleichheit nur in der 1-PN-Näherung.

#### 3.2.2 Berechnung mithilfe eines koordinatenabhängigen Zuganges

Um die letzte stabile Kreisbahn berechnen zu können, muss die Hamiltonfunktion (3.40) für ein Binärsystem aufgestellt werden. Dafür geht man in das Schwerpunktsystem über; hier ist bekannt, dass der Gesamtimpuls gleich null sein muss, also  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  ist. Durch Division mit der reduzierten Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  vereinfacht sich die Gleichung wesentlich und man erhält den 2-Körper-Hamiltonian:

$$\begin{aligned} \frac{H_{PN}}{\mu} - c^2 &= H'_{PN} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{J^2}{r^2} - \frac{GM}{r}}_{\text{Newton}} - \frac{1}{8c^2} \left( \frac{J^4}{r^4} - \frac{3J^4 \nu}{r^4} \right) \\ &- \frac{GM}{2c^2 r} \left( \frac{(3+y)J^2}{r^2} + \frac{J^2 \nu}{r^2} \right) + (1+y) \frac{G^2 M^2}{2c^2 r^2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dabei ist  $M$  die Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$ ,  $\nu$  der Massenfaktor  $\nu = \frac{\mu}{M}$ ,  $J$  der reduzierte Drehimpuls und  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Man erkennt in den ersten beiden Termen die Newtonsche Hamiltonfunktion, die restlichen Terme entsprechen der erst-post-Newtonschen Korrektur.

Luc Blanchet hat in [10, S.7] die Hamiltonfunktion für das Zweikörperproblem bis zur dritten post-Newtonschen Ordnung in isotropen Koordinaten aufgestellt. Vergleicht man diese Gleichung mit der so eben gewonnenen erst-post-Newtonschen Hamiltonfunktion (3.59), so erkennt man, dass bis zur ersten Ordnung Übereinstimmung vorliegt.

Um die Hamiltonfunktion auf ihre Richtigkeit zu überprüfen, kann der Testteilchen-Limes  $\nu \rightarrow 0$  ausgeführt werden und die hieraus gewonnene Gleichung mit einer Reihenentwicklung einer exakten Testteilchen-Hamiltonfunktion verglichen werden. Die exakte Hamiltonfunktion für ein Testteilchen in der Schwarzschildmetrik lautet in isotropen Koordinaten :

$$\frac{H}{\mu}(r, J) = H'(r, J) = c^2 \frac{1 - 1/2c^2 r}{1 + 1/2c^2 r} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{2c^2 r}\right)^{-4} \frac{J^2}{c^2 r^2} - c^2} \quad [2, S.515]. \quad (3.60)$$

Eine Reihenentwicklung ergibt:

$$H'(r, J) = \frac{(J^2 - 2r)}{2r^2} + \frac{(-J^4 - 12J^2 r + 4r^2)}{8r^4 c^2} + O[1/c]^4. \quad (3.61)$$

Für ein Testteilchen wird (3.59) zu:

$$H'_{PN} = \frac{1}{2} \frac{J^2}{r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{1}{8c^2} \frac{J^4}{r^4} - (3+y) \frac{GM}{2c^2 r} \frac{J^2}{r^2} + (1+y) \frac{G^2 M^2}{2c^2 r^2}. \quad (3.62)$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in isotropen Koordinaten  $y = 0$  ist und die Einheiten in [2] so gewählt sind, dass  $G = M = 1$  gilt ist zu erkennen, dass die beiden Gleichungen übereinstimmen. Dies bestätigt die aus (3.40) hergeleitete 1-PN-Hamiltonfunktion in ihrer Richtigkeit. Nun kann überprüft werden, wie gut die letzte stabile Kreisbahn mithilfe dieser Näherung berechnet werden kann.

Wir fordern wieder die Bedingungen für eine stabile Kreisbahn:

$$\frac{\partial H'}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial^2 H'}{\partial r^2} \stackrel{!}{\geq} 0. \quad (3.63)$$

Damit ergeben sich für jedes Koordinatensystem zwei mögliche Lösungen, wovon eine jeweils physikalisch irrelevant ist, da sie innerhalb des Schwarzschildradius liegt und sich damit auf keinen Fall im Gültigkeitsbereich der verwendeten Näherung befindet. Man erhält somit in isotropen und harmonischen Koordinaten ( $y=0$ ) einen Wert von  $r = 11,1 \frac{GM}{c^2}$  und für Schwarzschildkoordinaten ( $y=-2$ ) einen Wert von  $r = 6,35 \frac{GM}{c^2}$ . Hier ist zu erkennen, dass die Berechnung in Schwarzschildkoordinaten die geringste Abweichung von der exakten Lösung liefert (ca. 6 %), während die letzten stabilen Kreisbahnen, die in isotropen und harmonischen Koordinaten berechnet wurden, um mehr als das Doppelte vom exakten Wert abweichen.

In Abbildung 3 und 4 auf der nächsten Seite sind die exakte Hamiltonfunktion und die Näherung für unterschiedliche Werte des Drehimpulses in isotropen Koordinaten dargestellt.

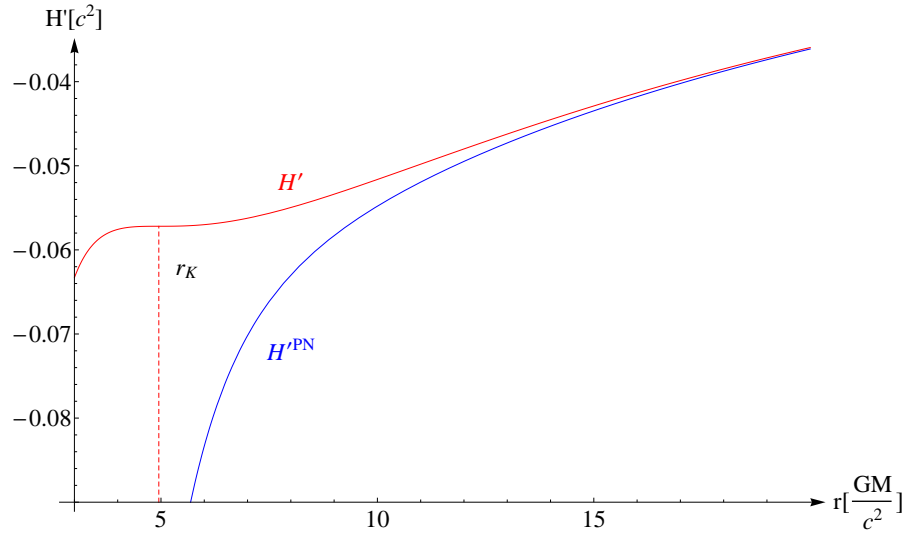


Abbildung 3: Vergleich der PN-Näherung mit der exakten Hamiltonfunktion für  $J = 3,43 \frac{GM}{c}$  in isotropen Koordinaten. Man erkennt die letzte stabile Kreisbahn für  $H'$  bei  $r = 4,95 \frac{GM}{c^2}$ , während  $H'^{PN}$  keine physikalisch relevanten Extrema besitzt.

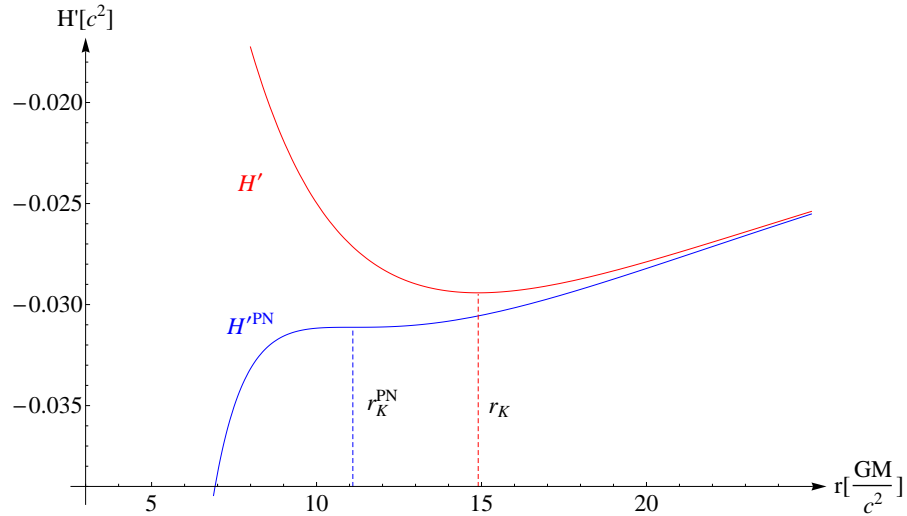


Abbildung 4: Vergleich der PN-Näherung mit der exakten Hamiltonfunktion für  $J = 4,43 \frac{GM}{c}$ . Ab diesem Wert besitzt auch  $H'^{PN}$  ein lokales Minimum.

Dabei ist dieser in Abbildung 3 so gewählt, dass das Minimum von  $H'$  gerade noch vorhanden ist und noch keinen Sattelpunkt darstellt. Interessanterweise besitzt in diesem Fall die Näherung  $H'_{\text{PN}}$  kein Minimum, d.h. keine stabile Kreisbahn. Erst bei einem höheren Drehimpuls existiert auch in der Näherung eine stabile Kreisbahn, wie in Abbildung 4 dargestellt ist. Man kann in beiden Grafiken außerdem gut erkennen, dass die Näherung nur für größere Abstände gültig ist.

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, dass in der Newtonschen Gravitationstheorie keine letzten stabilen Kreisbahnen auftreten. Dies kann nun überprüft werden, indem bei den Berechnungen nur der Newtonsche Teil der Hamiltonfunktion (3.59) berücksichtigt wird. Dieser lautet:

$$H'_{\text{New}} = \frac{1}{2} \frac{J^2}{r^2} - \frac{GM}{r}. \quad (3.64)$$

Setzt man

$$\frac{\partial H'_{\text{New}}}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.65)$$

so erhält man als Lösung für den Drehimpuls  $J = \pm\sqrt{rGM}$ . Bildet man die zweite Ableitung nach  $r$  und setzt das Ergebnis für den Drehimpuls ein, so ist das Resultat:

$$\frac{\partial^2 H'_{\text{New}}}{\partial r^2} = \frac{GM}{r^3} > 0 \quad \text{da} \quad r > 0. \quad (3.66)$$

Somit existiert für jeden beliebigen Abstand eine stabile Kreisbahn. Dies bestätigt, dass es in der Newtonschen Gravitationstheorie keine letzte stabile Kreisbahn gibt.

Es mag sich an dieser Stelle die Frage stellen, warum diese Abweichung von der Newtonschen Theorie nicht schon vor ihrer theoretischen Beschreibung entdeckt worden ist, wie es z. B. für die „anomale“ Periheldrehung der Fall war. Die Ursache hierfür liegt darin, dass die letzte stabile Kreisbahn erst bei sehr kompakten Körpern, wie Neutronensternen oder Schwarzen Löchern, beobachtet werden kann. Betrachtet man z. B. die Sonne als Punktmasse und berechnet die letzte stabile Kreisbahn eines die Sonne umkreisenden Planetens (dessen Masse im Verhältnis zur Sonnenmasse sehr klein sein soll), so erhält man mit einer Sonnenmasse von  $M_S \approx 2 \cdot 10^{30}$  kg einen Wert von  $r = 8,9$  km. Das bedeutet, die Sonne müsste auf einen Radius von unter 8,9 km komprimiert werden, damit die letzte stabile Kreisbahn beobachtbar wäre.

Bei Schwarzen Löchern hingegen sollte die letzte stabile Kreisbahn beobachtbar sein. So kann zum Beispiel das thermische Spektrum von Akkretionsscheiben, welche sich um Schwarze Löcher herum gebildet haben, untersucht werden. Dadurch, dass sich das Akkretionsmaterial innerhalb der letzten stabilen Kreisbahn nicht auf stabilen Bahnen bewegen kann, stürzt es ab diesem Abstand rasch in das Schwarze Loch hinein. Deshalb wird angenommen, dass die Dichte der Akkretionsscheibe innerhalb der letzten Bahn sehr gering ist und von daher nur Material außerhalb der letzten stabilen Kreisbahn zum thermischen Spektrum beiträgt. Für den interessierten Leser seien hierzu BOJOWALD [11] und PSALTIS [12, Abschnitt 4.2] empfohlen.

### 3.2.3 Berechnung mithilfe eines koordinateninvarianten Zuganges

Das im vorherigen Abschnitt benutzte Verfahren ist offensichtlich koordinatenabhängig. Wie bereits gezeigt wurde, kann die Hamiltonfunktion aber auch durch die koordinateninvariante Variable  $\omega$ , welche die Winkelgeschwindigkeit darstellt, ausgedrückt werden. Hierbei sollte der koordinatenabhängige Faktor  $y$  bei korrekter Herleitung der Hamiltonfunktion  $H(\omega)$  nicht mehr vorkommen. Die letzte stabile Kreisbahn liegt dann bei  $\frac{dH(\omega)}{d\omega} = 0$ .

Es soll noch einmal betont werden, dass die Invarianz nicht zu einem genaueren Ergebnis führt, allerdings kann durch die Differenzen der erhaltenen Resultate eine genauere Abschätzung über die Unsicherheit der ermittelten letzten stabilen Kreisbahn durchgeführt werden.

Mithilfe von Gleichung (3.62) und der Relation

$$\frac{\partial H'_{PN}(r, J)}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.67)$$

kann die Gleichung

$$H'_{PN}(J) = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2}{J^2} - \frac{9}{8c^2} \frac{G^4 M^4}{J^4} \quad (3.68)$$

gewonnen werden. Man beachte, dass der numerische Faktor  $y$  hier nicht mehr vorkommt. Mithilfe von  $\frac{dH(J)}{dJ} = \omega$  erhält man die Beziehung

$$\omega = \frac{G^2 M^2}{J^3} + \frac{9}{2c^2} \frac{G^4 M^4}{J^5} \quad (3.69)$$

und damit schließlich das Resultat:

$$\boxed{\frac{H'_{PN}(\omega)}{c^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{GM\omega}{c^3} \right)^{2/3} + \frac{3}{8} \left( \frac{GM\omega}{c^3} \right)^{4/3} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \quad \text{mit} \quad x = \left( \frac{GM\omega}{c^3} \right)^{2/3}} \quad (3.70)$$

Um zu prüfen, ob die Gleichung korrekt ist, kann die Hamiltonfunktion der exakten Lösung in eine Reihe entwickelt werden:

$$H'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{1-3x}} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{27}{16}x^3 + O[x^4] \quad (3.71)$$

Man sieht sofort, dass die 1-PN-Terme übereinstimmen. Nun kann mithilfe der Bedingung

$$\frac{dH(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (3.72)$$

die letzte stabile Kreisbahn zu  $\omega = 0,544 \frac{c^3}{GM}$  bestimmt werden. Dies ergibt in kartesischen Koordinaten einen Wert von  $R = 2,2 \frac{GM}{c^2}$  und in isotropen und harmonischen Koordinaten einen Wert von  $r = 2,3 \frac{GM}{c^2}$ . Wie man erkennen kann, weichen diese Werte sehr stark von den mittels des koordinatenabhängigen Zuganges berechneten Ergebnissen ab und liegen sehr nahe am Schwarzschildradius. An den Schwankungen kann man erkennen, wie ungenau die verwendete Näherung ist.

### 3.2.4 Zusammenfassung der bisherigen Resultate

Tabelle 1: Vergleich der bisher ermittelten letzten stabilen Kreisbahnen eines Testteilchens. Die Radien sind in der Einheit  $\frac{GM}{c^2}$  angegeben.

	Schwarzschild	Isotrop	Harmonisch
Exakte Hamiltonfunktion	6	4,95	5
1-PN: Koordinatenabhängiger Zugang	6,35	11,1	11,1
1-PN: Koordinateninvarianter Zugang	2,2	2,3	2,3

Vergleicht man die bisher gewonnenen Resultate der letzten stabilen Kreisbahnen im Testteilchenlimit, welche in Tabelle 1 dargestellt sind, so erkennt man, dass sehr große Abweichungen vom exakten Ergebnis vorliegen. Während die Werte für den koordinatenabhängigen Zugang eher nach oben abweichen, liegen die letzten stabilen Kreisbahnen, die mit dem invarianten Zugang ermittelt wurden, deutlich unter dem exakten Wert. Darüber hinaus sieht man, dass die Rechnung mittels des koordinatenabhängigen Verfahrens in Schwarzschildkoordinaten einen sehr viel besseren Wert liefert als in den anderen Koordinatensystemen. Dies deckt sich mit den Ergebnissen aus SCHÄFER [2, S.515], wo gezeigt wurde, dass das PN-Verfahren für die Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn eines Testteilchens in Schwarzschildkoordinaten schneller konvergiert als in isotropen und harmonischen Koordinaten. Im Gegensatz dazu unterscheiden sich die Ergebnisse des invarianten Zuganges nur sehr schwach voneinander.

In Hinblick auf die Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn eines Binärsystems zeigen die bisherigen Resultate, dass kein genaues Ergebnis zu erwarten ist, aber zumindest eine Abschätzung der Größenordnung, in der diese liegt, durchgeführt werden kann.

## 4 Bestimmung der letzten stabilen Kreisbahn eines Binärsystems

### 4.1 Berechnung mithilfe eines koordinatenabhängigen Zuganges

Nun kann mithilfe der bisher gewonnenen Erkenntnisse die letzte stabile Kreisbahn eines Binärsystems berechnet werden. Dazu wird die Gleichung (3.59) benutzt. Weiterhin wird vom Fall ausgegangen, dass die beiden Massen gleich groß sind. Dadurch nimmt der Massenfaktor den Wert  $\nu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{4}$  an und man erhält:

$$\frac{H'_{PN}}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{8c^2} \left( \frac{J^4}{r^4} - \frac{3J^4}{4r^4} \right) - \frac{G^2 M}{2c^2 r} \left( \frac{(3+y)J^2}{r^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right) - \frac{GM}{r} + (1+y) \frac{G^2 M^2}{2c^2 r^2}. \quad (4.73)$$

Mithilfe der Bedingung

$$\frac{\partial H}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \stackrel{!}{\geq} 0 \quad (4.74)$$

erhält man für isotrope und harmonische Koordinaten ( $y=0$ ) einen Wert von  $9,9 \frac{GM}{c^2}$ , während die letzte stabile Kreisbahn für Schwarzschild-Koordinaten ( $y=-2$ ) den Wert  $5,0 \frac{GM}{c^2}$  annimmt.

## 4.2 Berechnung mithilfe eines koordinateninvarianten Zuganges

Zur Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn mithilfe des invarianten Zuganges verwendet man wieder die Hamiltonfunktion (3.59) und ermittelt genauso, wie es beim Testteilchen gemacht wurde, die Funktion:

$$H'_{PN}(J) = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2}{J^2} - \frac{G^4 M^4}{8J^4 c^2} (9 + \nu). \quad (4.75)$$

Man erkennt, dass sich für  $\nu = 0$  die Funktion des Testteilchens ergibt. Die Winkelfrequenz wird zu:

$$\frac{dH'_{PN}(J)}{dJ} = \frac{G^2 M^2}{J^3} + \frac{G^4 M^4}{2J^5 c^2} (9 + \nu) \quad (4.76)$$

bestimmt.

Somit nimmt die koordinateninvariante Hamiltonfunktion die Gestalt

$$\boxed{\frac{H'_{PN}(x)}{c^2} = -\frac{x}{2} + \left(\frac{3}{8} + \frac{\nu}{24}\right) x^2 \quad \text{mit} \quad x = \left(\frac{GM\omega}{c^3}\right)^{2/3}} \quad (4.77)$$

an. Ein Vergleich mit der Hamiltonfunktion aus SCHÄFER [5, S.25] bestätigt die Richtigkeit unserer Herleitung.

Läuft  $\nu$  gegen null, so erhält man erwartungsgemäß das gleiche Resultat wie beim Testteilchen. Schließlich kann die letzte stabile Kreisbahn bestimmt werden:

$$\frac{dH'_{PN}(\omega)}{d\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \left(\frac{1}{1.5 + \nu/6}\right)^{3/2} \frac{c^3}{GM} \quad (4.78)$$

Nimmt  $\nu$  zu, so nimmt die Winkelfrequenz ab und der Radius der letzten stabilen Kreisbahn wird größer. D. h., je ähnlicher die Massen sind, desto größer wird die Bahn. Für gleich große Massen ist  $\nu = 1/4$  und der Radius wird maximal. Für diesen Fall erhält man eine Winkelfrequenz von  $\omega = 0.522 \frac{c^3}{MG}$ . Rechnet man dieses Ergebnis in den jeweiligen Koordinatensystemen in einen Radius um, so erkennt man, dass sich die Werte unwesentlich unterscheiden und wir für Schwarzschild-, harmonische und isotrope Koordinaten ungefähr den gleichen Wert von  $r = 2,9 \frac{GM}{c^2}$  erhalten.



## 5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit konnte mithilfe einer 1-PN-Hamiltonfunktion gezeigt werden, dass die letzte stabile Kreisbahn eines Zweikörpersystems mit gleichen Massen in kartesischen Schwarzschildkoordinaten im Bereich von  $5 \frac{GM}{c^2}$  liegt und somit kleiner als die eines Testteilchens ist. Das Fehlerintervall ist dabei relativ groß und beträgt  $\pm 3 \frac{GM}{c^2}$ . Vergleicht man dies mit anderen Ergebnissen wie z. B. aus SCHÄFER [2], wo mithilfe einer 2-PN-Hamiltonfunktion ein Radius von  $(5 \pm 1) \frac{GM}{c^2}$  berechnet wurde, so sieht man, dass die Resultate gut übereinstimmen. Die einzelnen Werte sind noch einmal in Tabelle 2 aufgeführt.

Tabelle 2: Vergleich der ermittelten letzten stabilen Kreisbahnen eines Binärsystems mit  $\nu = 1/4$ . Die Radien sind in der Einheit  $\frac{GM}{c^2}$  angegeben.

	Schwarzschild	Isotrop	Harmonisch
Koordinatenabhängiger Zugang	5,0	9,9	9,9
Koordinateninvarianter Zugang	2,9	2,9	2,9

Zur Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn wurden zwei verschiedene Verfahren verwendet, wovon das eine koordinatenabhängig und das andere koordinateninvariant war. Damit wurde zuerst die letzte stabile Kreisbahn eines Testteilchens berechnet, wobei sich schon hier zeigte, dass die Abweichungen vom exakten Wert sehr groß sind. Mithilfe der gleichen Verfahren konnte anschließend die letzte stabile Kreisbahn eines Binärsystems berechnet werden.

Nun mag man sich die Frage stellen, wieso die 1-PN-Näherung auf ein Zweikörpersystem angewandt wurde, um die letzte stabile Kreisbahn zu bestimmen. Schließlich zeigte die exakte Berechnung der letzten stabilen Kreisbahn im Testteilchenlimit, dass die Näherung an der Grenze ihrer Gültigkeit (schwache Felder,  $\frac{v}{c} \lesssim \frac{1}{3}$ ) verwendet wird und somit keine guten, eventuell sogar keine physikalisch sinnvollen Ergebnisse zu erwarten waren.

Diese Frage lässt sich damit beantworten, dass sich seit der Entwicklung der post-Newtonschen Methode gezeigt hat, dass diese auch in Bereichen, in denen ihre Gültigkeit nicht mehr gewährleistet ist, erstaunlich gute Werte liefert. Somit können auch Berechnungen am Rande der Gültigkeit gute Resultate erzielen. Hierbei muss der Fehlerbereich gut abgeschätzt werden, wie es z. B. mithilfe von Berechnungen in unterschiedlichen Koordinatensystemen möglich ist und in dieser Arbeit auch durchgeführt wurde.

Hält man sich vor Augen, wie kompliziert es ist, eine Lösung für die Einsteinschen-Feldgleichungen zu finden und nimmt dann zur Kenntnis, dass in dieser Arbeit im Wesentlichen nur ein Zusatzterm zur Newtonschen Gravitationstheorie benutzt wurde, so ist das für die letzte stabile Kreisbahn erzielte Ergebnis erstaunlich gut. Diese „unreasonable effectiveness“<sup>4</sup>, wie es Clifford M. Will in [13] nennt, ist die verblüffende Eigenschaft der post-Newtonschen Methode, selbst in Bereichen in denen die Gültigkeit der Näherung zumindest fraglich ist, mit recht wenigen Zusatztermen zur Newtonschen Gravitationstheorie gute Ergebnisse zu liefern. Dieser Umstand konnte in dieser Arbeit bestätigt werden.

<sup>4</sup>Dieser Begriff wurde vom Physiker Eugene Wigner geprägt, der diesen in seiner Arbeit „On the unreasonable effectiveness of mathematics in the physical sciences“ verwendete. Will übernimmt diesen Begriff in der Arbeit „On the unreasonable effectiveness of the post-Newtonian approximation in gravitational Physics“ [13], um die Leistungsfähigkeit der PN-Methode zu beschreiben.

Zusätzlich beschreiben die einzigen exakten Lösungen der Einsteinschen-Feldgleichungen hochsymmetrische physikalische Sachverhalte (z. B. die Schwarzschild-Metrik: Eine räumlich begrenzte, kugelsymmetrische Massenverteilung), während eine der wohl interessantesten Vorhersagen der Gravitationstheorie, die Gravitationswellen, asymmetrische Raumzeiten benötigen. Damit wird das post-Newtonsche-Verfahren wohl eine wichtige Rolle bei der Vorhersage, der Beschreibung und der etwaigen Entdeckung von Gravitationswellen spielen.

## Literatur

- [1] H. Goldstein, C. P. Poole: „Klassische Mechanik“. 3. Auflage, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2006
- [2] Gerhard Schäfer: „Coalescing binaries and plunge orbits“. Aus: Perspectives in Neutrinos Atomic Physics and Gravitation. Herausgegeben von J. Tran Thanh Van, T. Damour, E. Hinds, J. Wilkerson. Editions Frontières, 1993.
- [3] H. Stephani: „Allgemeine Relativitätstheorie“. 1. Ausgabe, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977
- [4] S. Shapiro, S. Teukolsky: „Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars“. Wiley-VCH Verlag, 2004
- [5] Gerhard Schäfer: „Post-Newtonian methods: Analytic results on the binary problem“. ArXiv:0910.2857
- [6] Gerhard Schäfer, „Schritt für Schritt von Newton zu Einstein“ in: Einstein Online Band 4 (2010), 1108
- [7] F. Markley: „Motion in the Schwarzschild Metric“. American Journal of Physics, Vol. 41, 1973
- [8] T. Ohta, H. Okamura, T. Kimura, K. Hiida: „Physically Acceptable Solution of Einstein’s Equation for Many-Body Systems“. Progress of Theoretical Physics, Vol. 50, No.2, August 1973. Seite 492-505.
- [9] Steven Weinberg: „Gravitation and Cosmology“. 1. Ausgabe, John Wiley and Sons, Inc., 1972
- [10] Luc Blanchet: „General Relativistic Dynamics of Compact Binary Systems“. Institut d’astrophysique de Paris. ArXiv:gr-qc/0611142, 2006
- [11] Martin Bojowald: „The Universe: A View from Classical and Quantum Gravity“. Wiley-VCH, 2013. Kapitel 5.1: „Stars“
- [12] Dimitrios Psaltis: „Probes and Tests of Strong-Field Gravity with Observations in the Electromagnetic Spectrum“. Living Rev. Relativity 11, (2008), 9. URL (15.06.13): <http://www.livingreviews.org/lrr-2008-9>.
- [13] Clifford M. Will: „On the unreasonable effectiveness of the post-Newtonian approximation in gravitational physics“. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 108 No.5. 2011